

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'usage des calculatrices conformes à la réglementation en vigueur et du formulaire officiel de mathématiques est autorisé.

EXERCICE 1 (4 points)

On considère la suite numérique (u_n) définie sur \mathbf{N} par :

$$u_0 = a, \text{ et, pour tout entier } n, u_{n+1} = u_n(2 - u_n)$$

où a est un réel donné tel que $0 < a < 1$.

1°- On suppose dans cette question que $a = \frac{1}{8}$.

- Calculer u_1 et u_2 .
- Dans un repère orthonormal (unité graphique 8 cm), tracer, sur l'intervalle $[0 ; 2]$, la droite \mathcal{d} d'équation $y = x$ et la courbe \mathcal{P} représentative de la fonction $f : x \mapsto x(2 - x)$.
- Utiliser \mathcal{d} et \mathcal{P} pour construire sur l'axe des abscisses les points A_1, A_2, A_3 d'abscisses respectives u_1, u_2 et u_3 .

2°- On suppose dans cette question que a est un réel quelconque de l'intervalle $]0 ; 1[$.

- Montrer par récurrence que, pour tout entier n , $0 < u_n < 1$.
- Montrer que la suite (u_n) est croissante.
- Que peut-on en déduire ?

3°- On suppose à nouveau dans cette question que $a = \frac{1}{8}$

On considère la suite numérique (v_n) définie sur \mathbf{N} par $v_n = 1 - u_n$.

- Exprimer, pour tout entier n , v_{n+1} en fonction de v_n .
- En déduire l'expression de v_n en fonction de n .
- Déterminer la limite de la suite (v_n) , puis celle de la suite (u_n) .

MA SE IN1		EXAMEN : BACCALAUREAT GENERAL	SPECIALITE : SERIE S	
SESSION 2003	SUJET	EPREUVE : MATHÉMATIQUES – ENSEIGNEMENT DE SPECIALITE		
DUREE : 4 H	COEFFICIENT DE L'EPREUVE : 9	CODE SUJET : 21cs03	PAGE : 1/5	

EXERCICE 2 (5 points)

Première partie

On considère, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation suivante

$$(\mathcal{E}) : z^3 + 2z^2 - 16 = 0$$

1°- Montrer que 2 est solution de (\mathcal{E}) , puis que (\mathcal{E}) peut s'écrire sous la forme

$$(z - 2)(az^2 + bz + c) = 0$$

où a , b et c sont trois réels que l'on déterminera.

2°- En déduire les solutions de l'équation (\mathcal{E}) sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.

Deuxième partie

Le plan complexe est muni du repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

1°- Placer les points A, B et D d'affixes respectives

$$z_A = -2 - 2i, z_B = 2 \text{ et } z_D = -2 + 2i.$$

2°- Calculer l'affixe z_C du point C tel que ABCD soit un parallélogramme.
Placer C.

3°- Soit E l'image du point C par la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{2}$,
et F l'image du point C par la rotation de centre D et d'angle $+\frac{\pi}{2}$.

a) Calculer les affixes des points E et F, notées z_E et z_F .

b) Placer les points E et F.

4°- a) Vérifier que $\frac{z_F - z_A}{z_E - z_A} = i$.

b) En déduire la nature du triangle AEF.

5°- Soit I le milieu de [EF].

Déterminer l'image du triangle EBA par la rotation de centre I et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

EXERCICE 2 (5 points)

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Première partie :

ABC est un triangle direct du plan orienté.

On désigne respectivement par I, J et K les milieux de [AB], [BC] et [CA].

Soit α un réel qui conduit à la réalisation de la figure jointe en page 5 sur laquelle on raisonnera.

La page 5 sera jointe à la copie.

d_1 est l'image de la droite (AB) par la rotation de centre I et d'angle α .

d_2 est l'image de la droite (BC) par la rotation de centre J et d'angle α .

d_3 est l'image de la droite (CA) par la rotation de centre K et d'angle α .

A_1 est le point d'intersection de d_1 et d_3 , B_1 celui de d_1 et d_2 , et C_1 celui de d_2 et d_3 .

1°- On appelle H le point d'intersection de (BC) et d_1 . Montrer que les triangles HIB et HB_1J sont semblables.

2°- En déduire que les triangles ABC et $A_1B_1C_1$ sont semblables.

Deuxième partie :

Le plan complexe est muni du repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

A - Construction de la figure

1°- Placer les points $A(-4 - 6i)$, $B(14)$, $C(-4 + 6i)$, $A_1(3 - 7i)$, $B_1(9 + 5i)$ et $C_1(-3 - i)$.

2°- Calculer les affixes des milieux I, J et K des segments [AB], [BC] et [CA].
Placer ces points sur la figure.

3°- Montrer que A_1, I, B_1 sont alignés.

On admettra que B_1, J, C_1 d'une part, et C_1, K, A_1 d'autre part sont alignés.

4°- Déterminer une mesure en radians de l'angle (\vec{IB}, \vec{IB}_1) .

On admettra que $(\vec{KA}, \vec{KA}_1) = \frac{\pi}{4}$ et $(\vec{JC}, \vec{JC}_1) = \frac{\pi}{4}$.

5°- Quelle est l'image de la droite (AB) par la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{4}$?

B – Recherche d'une similitude directe s transformant ABC en $A_1B_1C_1$.

On admet qu'il existe une similitude directe s transformant les points A, B et C respectivement en A_1, B_1 et C_1 .

1°- Montrer que l'écriture complexe de s est $z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)z + 2 - 2i$, où z et z' désignent respectivement les affixes d'un point et de son image par s .

2°- a) Déterminer le rapport et l'angle de s .
b) Déterminer l'affixe du centre Ω de s .

3°- Que représente le point Ω pour le triangle ABC ?

PROBLEME (11 points)

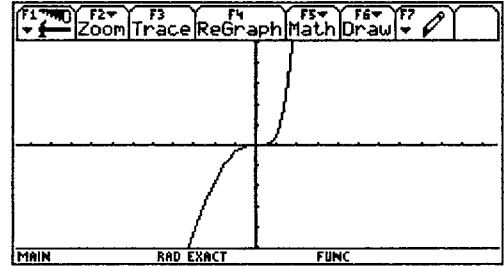
On considère la fonction numérique f définie sur \mathbf{R} par $f(x) = x^2 e^{x-1} - \frac{x^2}{2}$.

Le graphique ci-dessous est la courbe représentative de cette fonction telle que l'affiche une calculatrice dans un repère orthonormal.

Conjectures

A l'observation de cette courbe, quelles conjectures pensez-vous pouvoir faire concernant

- le sens de variation de f sur $[-3 ; 2]$?
- la position de la courbe par rapport à l'axe $(x'x)$?



Dans la suite de ce problème, on se propose de valider ou non ces conjectures et de les compléter.

Partie A : Contrôle de la première conjecture.

1°- Calculer $f'(x)$ pour tout réel x , et l'exprimer à l'aide de l'expression $g(x)$

où g est la fonction définie sur \mathbf{R} par $g(x) = (x+2)e^{x-1} - 1$.

2°- Etude du signe de $g(x)$ pour x réel.

- Calculer les limites de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$ puis quand x tend vers $-\infty$.
- Calculer $g'(x)$ et étudier son signe suivant les valeurs de x .
- En déduire le sens de variation de la fonction g , puis dresser son tableau de variation.
- Montrer que l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution dans \mathbf{R} .
On note α cette solution. Montrer que $0,20 < \alpha < 0,21$.
- Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

3°- Sens de variation de la fonction f sur \mathbf{R} .

- Etudier, suivant les valeurs de x , le signe de $f'(x)$.
- En déduire le sens de variation de la fonction f .
- Que pensez-vous de votre première conjecture ?

Partie B : Contrôle de la deuxième conjecture.

On note C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

On se propose de contrôler la position de la courbe par rapport à l'axe $(x'x)$.

1°- Montrer que $f(\alpha) = \frac{-\alpha^3}{2(\alpha+2)}$.

2°- On considère la fonction h définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par $h(x) = \frac{-x^3}{2(x+2)}$.

- a) Calculer $h'(x)$ pour $x \in [0 ; 1]$, puis déterminer le sens de variation de h sur $[0 ; 1]$.
- b) En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.

- 3°- a) Déterminer les abscisses des points d'intersection de la courbe C avec l'axe $(x'x)$.
- b) Préciser alors la position de la courbe C par rapport à l'axe des abscisses.
- c) Que pensez-vous de votre deuxième conjecture ?

Partie C : Tracé de la courbe.

Compte tenu des résultats précédents, on se propose de tracer la partie Γ de C correspondant à l'intervalle $[-0,2 ; 0,4]$, dans le repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) , avec les unités suivantes :

- Sur l'axe $(x'x)$: 1 cm représentera 0,05
- Sur l'axe $(y'y)$: 1 cm représentera 0,001

1°- Recopier le tableau suivant et compléter celui-ci à l'aide de la calculatrice en indiquant les valeurs approchées sous la forme $n.10^{-4}$ (n entier relatif).

x	-0,20	-0,15	-0,10	-0,05	0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40
$f(x)$													

2°- Tracer alors Γ dans le repère choisi.

Partie D : Calcul d'aire.

On désire maintenant calculer l'aire du domaine \mathcal{D} fermé délimité par la courbe Γ , l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1 - \ln(2)$.

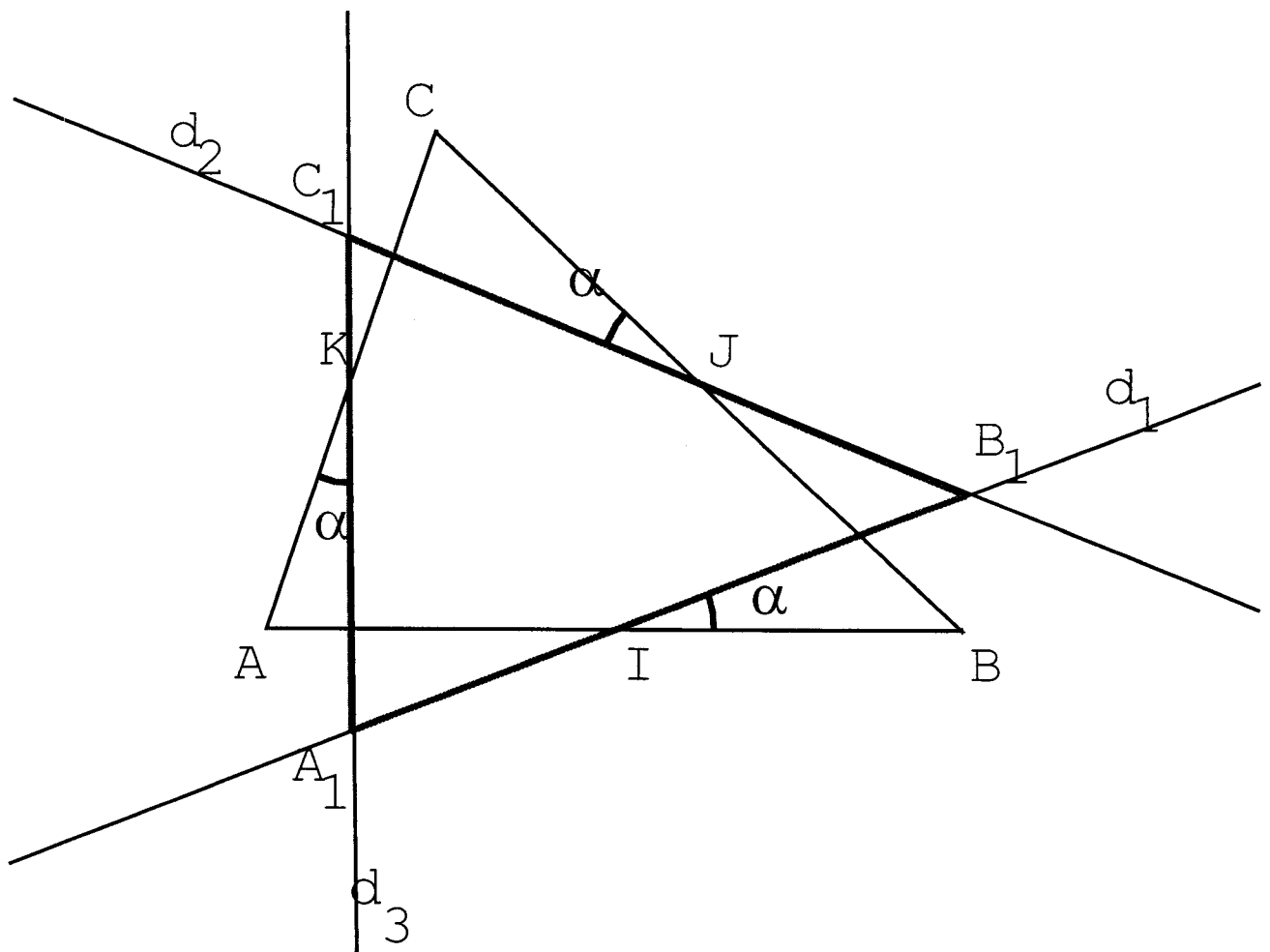
1°- A l'aide d'une double intégration par parties, déterminer une primitive sur \mathbf{R} de la fonction $x \mapsto x^2 e^x$.

2°- En déduire une primitive F sur \mathbf{R} de la fonction f .

3°- Calculer alors, en unités d'aire, l'aire du domaine \mathcal{D} puis en donner une valeur approchée en cm^2 .

EXERCICE 2

Le candidat joindra cette page à sa copie



Sujet 21 cs 03
CORRIGE ET BAREME

EXERCICE 1	4 points
1. a) $u_1 = \frac{15}{64}$ et $u_2 = \frac{1695}{4096}$	0,25
b) Tracé de la droite et de la parabole (l'étude des variations n'est pas demandée)	0,5
c) construction des points A_1, A_2 et A_3	0,5
2. a) raisonnement par récurrence correct et $0 < u_n < 1$	0,5
b) démonstration correcte de la croissance de la suite u	0,5
c) la suite u est croissante et majorée (par 1) donc converge	0,25
3. a) $v_{n+1} = (v_n)^2$	0,25
b) $v_n = (v_0)^{2^n}$ avec $v_0 = \frac{7}{8}$	0,5
c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$ et $0 < v_0 < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$	0,5
$u_n = 1 - v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$	0,25

EXERCICE 2 : Enseignement Obligatoire	5 points
Partie I	
1. $P(z) = 0$	0,25
Détermination des trois réels a, b et c : a=1, b=4 et c=8	0,50
2. Résolution de $P(z) = 0$; 3 solutions 2, $-2-2i$ et $-2+2i$	0,50
$-2-2i = 2\sqrt{2} e^{-i\frac{3\pi}{4}}$ et $-2+2i = 2\sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}}$	0,25
Partie II	
1. Points correctement placés	0,25
2. $z_C = 2+4i$ avec justification correcte	0,25
3. a) $z_E = 6$; $z_F = -4+6i$	0,50
b) points E et F correctement placés	0,25
4. a) Egalité correctement justifiée	0,25
b) Raisonnement correct prouvant que AEF est un triangle rectangle en A et isocèle	0,5
5. Raisonnement correct prouvant que l'image du triangle EBA est FDA	0,5

EXERCICE 2 Enseignement de spécialité	5 points
PARTIE I	
1. Les deux triangles B_1JH et IHB sont semblables Démonstration correcte	0,25
2. Les deux triangles ABC et $A_1 B_1 C_1$ sont semblables	0,5
PARTIE II	
Partie A	
1. Points correctement placés	0,5
2. $z_I = 5 - 3i$; $z_J = 5 + 3i$; $z_K = -4$	0,5
3. les points A_1 , I et B_1 sont alignés (toute méthode acceptée)	0,5
4. $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IB_1}) = \dots = \arg \frac{2}{3}(1+i) = \frac{\pi}{4}$	0,5
5. L'image de la droite (AB) par la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{4}$ est (A_1B_1) (toute méthode acceptée).	0,5
Partie B	
1. Ecriture complexe de la similitude directe, toute méthode acceptée	0,5
<p>NB . L'existence d'une similitude directe transformant le triangle ABC en $A_1 B_1 C_1$ est admise ; donc, si l'écriture a été recherchée sous la forme $z' = az + b$, en résolvant le système de 2 équations à deux inconnues complexes a et b obtenu en utilisant deux couples de points homologues, la vérification pour le troisième couple n'est pas nécessaire. Autre méthode acceptée : vérification que l'écriture donnée est celle d'une similitude directe transformant le premier triangle en le second</p>	
2. a) Rapport de $s = \frac{\sqrt{2}}{2}$	0,25
Angle de $s = \frac{\pi}{4}$	0,25
b) affixe du centre : 4	0,25
3. $A\Omega = B\Omega = C\Omega$ donc Ω est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC	0,5

PROBLEME	11 points
<p>CONJECTURES</p> <p>a) la fonction f semble croissante sur $[-3 ; 2]$</p> <p>b) la courbe semble se situer au dessous de l'axe des abscisses pour x négatif et au dessus pour x positif (intersection en O)</p>	<p>0,25</p> <p>0,25</p>
<p>PARTIE A</p> <p>1. $f'(x) = (x^2 + 2x)e^{x-1} - x$ $f'(x) = x g(x)$</p> <p>2. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -1$.</p> <p>b) $g'(x) = (x+3)e^{x-1}$;</p> <p>$g'(x)$ a le signe de $(x+3)$. Etude correcte du signe</p> <p>c) g décroît sur $]-\infty ; -3]$ et croît sur $[-3 ; +\infty[$</p> <p>Tableau de variations complet (limites incluses)</p> <p>d) * D'après le tableau de variations précédent, g est strictement négative sur $]-\infty ; -3]$ et, comme $g(-3) < 0$, elle s'annule une seule fois sur $[-3 ; +\infty[$. * $g(0,20) < 0$ et $g(0,21) > 0$, donc $0,20 < \alpha < 0,21$</p> <p>e) g est strictement négative sur $]-\infty ; \alpha[$, strictement positive sur $]\alpha ; +\infty[$ et s'annule en α.</p> <p>3. a) $f'(x) = x g(x)$ d'où $f'(x)$ est strictement positive sur $]-\infty ; 0[$ et $]\alpha ; +\infty[$ $f'(x)$ est strictement négative sur $]0 ; \alpha[$ $f'(x)$ est nulle en 0 et α.</p> <p>b) Sens de variation correct (rédigé ou matérialisé dans un tableau)</p> <p>c) La première conjecture est fausse, la fonction n'est pas croissante sur $[-3 ; 2]$</p>	<p>0,5</p> <p>0,25</p> <p>0,5</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,5</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p>

PROBLEME suite		
PARTIE B		
1.	α est solution de $g(x) = 0$, donc tel que $e^{\alpha-1} = \frac{1}{\alpha+2}$ D'où l'égalité	0,5
2. a)	$h'(x) = \frac{-x^2(x+3)}{(x+2)^2}$	0,5
	$h'(x) \leq 0$, donc h est décroissante sur $[0 ; 1]$	0,25
	b) Encadrement de $f(\alpha)$ $0,20 < \alpha < 0,21$ donc $h(0,21) < h(\alpha) < h(0,20)$ Comme $h(\alpha) = f(\alpha)$, on a $-0,0021 < f(\alpha) < -0,0018$	0,5
3. a)	les abscisses des points d'intersection de la courbe C avec (x^x) sont 0 et $(1-\ln 2)$	0,5
	b) D'après le tableau de variation de f , la courbe C est au dessous de (x^x) si $x \in]-\infty ; 1 - \ln 2[$, et au dessus si $x \in]1 - \ln 2 ; +\infty[$.	0,25
	c) la seconde conjecture est donc fausse.	0,25
PARTIE C		
1.	Tableau de valeurs	0,75

x	-0,20	-0,15	-0,10	-0,05	0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40
f(x)	-80.10^{-4}	-41.10^{-4}	-17.10^{-4}	-4.10^{-4}	0.10^{-4}	-3.10^{-4}	-9.10^{-4}	-16.10^{-4}	-20.10^{-4}	-17.10^{-4}	-3.10^{-4}	27.10^{-4}	78.10^{-4}

2.	Tracé de la courbe sur $[-0,20 ; 0,40]$: (non respect de l'unité : -0,25)	0,75
PARTIE D		
1.	Par double « IPP », une primitive de la fonction $x \mapsto x^2 e^x$ est : $x \mapsto (x^2 - 2x + 2)e^x$	0,75
2.	Une primitive F de f est définie sur \mathbf{R} par $F(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x \cdot e^{-1} - \frac{x^3}{6}$	0,5
3.	Aire du domaine D, en unités d'aires : $A(D) = - \int_0^{1-\ln 2} f(x) dx = F(0) - F(1-\ln 2)$	0,5
	$A(D) = \frac{2}{e} - \frac{1}{3} - \frac{\ln 2}{2} - \frac{\ln^3 2}{6}$ (autre expression correcte acceptée)	
	Unité d'aire : 20000cm^2 , d'où l'aire de D en $\text{cm}^2 = 20000 A(D) \approx 7 \text{cm}^2$	0,25