

**Exercice 1**

On appelle fonction de type  $T_0$  les fonctions "trinômes" sur  $[-1 ; 1]$ , définies par:

$$t : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto t(x) = ax^2 + bx + c$$

$a$ ,  $b$  et  $c$  étant des réels quelconques. Pour tout entier naturel non nul  $n$ , on appelle fonctions de type  $T_n$  les fonctions de la forme  $f + \lambda|g|$ ,  $\lambda$  étant un réel quelconque et  $f$ ,  $g$  des fonctions quelconques de type  $T_{n-1}$ .

1. Etablir que la fonction  $\varphi$ , définie par  $\varphi(x) = 0$  pour tout  $x$  de  $[-1;0]$  et  $\varphi(x) = x$  pour tout  $x$  de  $[0 ; 1]$  est de type  $T_1$ .
2. On considère deux fonctions trinômes  $t_1$  et  $t_2$  telles que  $t_1(0) = t_2(0)$  et on définit la fonction  $f : [-1;1] \rightarrow \mathbb{R}$  telle que:  
Pour tout réel  $x$  de  $[-1 ; 0]$ ,  $f(x) = t_1(x)$  et pour tout réel  $x$  de  $[0 ; 1]$ ,  $f(x) = t_2(x)$ .  
Démontrer qu'il existe un entier naturel  $N$  tel que la fonction  $f$  soit de type  $T_N$ .

**Exercice 2**

On considère dans cet exercice tous les tableaux carrés à 9 cases dans lesquelles sont placés dans un certain ordre tous les entiers de 1 à 9. Par exemple :

1	8	7
9	2	4
6	5	3

A un tel tableau on associe les produits des éléments de ses lignes (56 , 72 , 90 dans l'exemple ci-dessus) et les produits des éléments de ses colonnes (54 , 80 , 84 dans l'exemple ci-dessus).

1. (a) Etant donné un tel tableau, montrer qu'il a au moins une ligne dont le produit des éléments est supérieur ou égal à 72.  
(b) Donner un tableau de ce type dont les trois lignes ont un produit de leurs éléments inférieur ou égal à 72.
2. Etant un tableau de ce type, montrer qu'il a au moins une ligne ou une colonne dont le produit des éléments est supérieur à 90.

**Exercice 3**

Dans cet exercice, étant donné un triangle non aplati  $ABC$ , on note  $a$ ,  $b$  et  $c$  les longueurs respectives des côtés  $BC$ ,  $CA$  et  $AB$ .

On dira que ce triangle est de type  $W$  si ses médianes issues de  $A$  et  $B$  sont perpendiculaires.

**Partie I : Géométrie**

1. Montrer qu'il existe des triangles  $ABC$  tels que l'on ait les relations :

$$c^2 = \frac{b^2}{2} = \frac{a^2}{3}$$

Etablir qu'un tel triangle est rectangle en  $A$  et qu'il est de type  $W$ .

2. Dans cette question on se fixe des points  $A$  et  $B$  et on considère l'ensemble  $\Gamma$  des points  $C$  tels que le triangle  $ABC$  soit de type  $W$

(a) Déterminer l'ensemble des points  $G$ , isobarycentres de  $A$ ,  $B$  et  $C$ , lorsque  $C$  décrit  $\Gamma$ .

(b) En déduire l'ensemble  $\Gamma$ .

(c) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par le rapport  $\frac{b}{c}$ .

(d) Représenter l'ensemble des points  $H$ , orthocentres des triangles  $ABC$ , lorsque  $C$  décrit  $\Gamma$ .

(On se placera dans un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  tel que  $A$  et  $B$  aient pour coordonnées respectives

$(-1; 0)$  et  $(1; 0)$  et l'on déterminera une fonction  $f$  telle que l'ensemble des points  $H$  soit la réunion de deux courbes d'équations respectives  $y = f(x)$  et  $y = -f(x)$ )

3. Dans cette question on se fixe des points  $A$  et  $C$  et on considère l'ensemble  $\Gamma'$  des points  $B$  tels que le triangle  $ABC$  soit de type  $W$ .

(a) Déterminer l'ensemble  $\Gamma'$ .

(b) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par le rapport  $\frac{a}{b}$ .

(c) Déterminer les triangles  $ABC$  de type  $W$  ayant un rayon de cercle circonscrit minimal.

(d) Représenter l'ensemble des points  $H$ , orthocentres des triangles  $ABC$ , lorsque  $B$  décrit  $\Gamma'$ .

(On se placera dans un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  tels que  $A$  et  $C$  aient pour coordonnées respectives  $(-1; 0)$  et  $(-5; 0)$ )

4. (a) Montrer qu'un triangle  $ABC$  est de type  $W$  si et seulement si l'on a la relation

$$(*) \quad a^2 + b^2 = 5c^2$$

(b) Etant donné des réels strictement positifs  $a$ ,  $b$  et  $c$  vérifiant la relation  $(*)$ , donner une condition nécessaire et suffisante portant sur le rapport  $\frac{a}{b}$  pour que  $a$ ,  $b$  et  $c$  soient les longueurs d'un triangle de type  $W$ .

**Partie II : Arithmétique**

**A. Deux familles de triangles**

Dans la suite de l'exercice, on se propose de rechercher les triangles de type  $W$  dont les côtés ont des longueurs entières, en commençant par rechercher l'ensemble  $F$  desc triplets  $(a, b, c)$  d'entiers naturels strictements positifs vérifiant la relation (\*).

On remarque que pour qu'un triplet  $(a, b, c)$  d'entiers strictement positifs soit élément de  $F$ , il suffit qu'il existe un entier strictement positif  $m$  tel que le triplet  $(ma, mb, mc)$  soit élément de  $F$ , de sorte qu'on peut se limiter à rechercher l'ensemble  $F_1$  des éléments  $(a, b, c)$  de  $F$  tesl que  $a$ ,  $b$  et  $c$  n'ont pas de facteur premier commun.

1. (a) Montrer que si  $(a, b, c)$  est élément de  $F_1$  alors les entiers  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont premiers deux à deux.
- (b) Etablir que si  $(a, b, c)$  est élément de  $F_1$  alors  $a$  et  $b$  sont de partié différentes.
- (c) Montrer que si  $(a, b, c)$  est élément de  $F_1$  alors  $a$  et  $b$  ne sont divisibles ni par 3, ni par 4, ni par 5.
- (d) Soit  $(a, b, c)$  un élément de  $F_1$ . Montrer que  $b^2 - 4a^2$  et  $a^2 - 4b^2$  sont des multiples de 5.  
En déduire qu'il existe un couple d'entiers  $(\alpha, \beta)$  tels que l'on ait

$$\left\{ \begin{array}{l} 2a + b = 5\alpha \\ -a + 2b = 5\beta \end{array} \right\| \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} 2a - b = 5\alpha \\ a + 2b = 5\beta \end{array} \right\|$$

Vérifier alors que l'on a  $\alpha^2 + \beta^2 = c^2$ , et que  $\alpha$  et  $\beta$  sont premiers entre eux.

- (e) Si  $\alpha$  et  $\beta$  sont des entiers premiers entre eux, les entiers  $a$  et  $b$  qui leur sont associés par les relations ci-dessus sont-ils premiers entre eux?

On admet désormais le résultat suivant:

Les triplets  $(x, y, z)$  d'entiers strictement positifs sans facteur premier commun, vérifiant  $x^2 + y^2 = z^2$  et tels que  $y$  soit pair, sont donnés par

$$x = u^2 - v^2 \quad , \quad y = 2uv \quad , \quad z = u^2 + v^2$$

où  $u$  et  $v$  sont des entiers strictements positifs, premiers entre eux, de parités différentes et vérifiant  $u > v$ , déterminés de manière unique.

2. On dira qu'un triangle est de type  $W_e$  s'il est de type  $W$  si les longueurs  $a$ ,  $b$  et  $c$  de ses côtés sont des entiers sans facteur premier commun et si  $a$  est pair.  
Montrer que pour tout triangle de type  $W_e$ , il existe des entiers strictement positifs  $u$  et  $v$ , premiers entre eux, de parités différentes et vérifiants  $u > v$ , tels que l'une des relations suivantes soit vérifiée:
  - (1)  $(a, b, c) = (2(u^2 - uv - v^2), u^2 + 4uv - v^2, u^2 + v^2)$
  - (2)  $(a, b, c) = (2(u^2 + uv - v^2), -u^2 + 4uv + v^2, u^2 + v^2)$
3. Déterminer les ensembles de couples  $(u, v)$  d'entiers positifs tels que la relation (1) (respectivement (2)) conduise à un triangle de type  $W_e$ .
4. Etablir qu'un triangle de type  $W_e$  est donné par une seule des deux relations (1) ou (2).  
On classe aisni les triangles de type  $W_e$  en deux catégories disjointes, que l'on notera  $W_1$  et  $W_2$ .
5. Donner les longueurs des côtés des triangles de type  $W_e$  dont le "petit" côté  $c$  a une longueur inférieure ou égale à 50.

**B . Entiers de la forme  $u^2 - uv - v^2$  et leurs diviseurs**

On se propose d'étudier les facteurs premiers supérieurs ou égaux à 7 des entiers  $a$  et  $b$ , longueurs des côtés  $BC$  et  $CA$  d'un triangle de type  $W_e$

1. On note  $w$  et  $w'$  les solutions de l'équation  $x^2 - x - 1 = 0$ .

Etablir la relation  $u^2 - ux - v^2 = (u - wv)(u - w'v)$ . En déduire que l'ensemble des entiers de la forme  $u^2 - uv - v^2$ , où  $u$  et  $v$  sont des entiers relatifs arbitraires, est stable par multiplication.

Que peut-on dire de l'ensemble des entiers de la forme  $u^2 + 4uv - v^2$ , où  $u$  et  $v$  sont des entiers relatifs arbitraires?

2. Soit  $p = 2q + 1$  un nombre premier strictement supérieur à 5 qui divise un entier de la forme  $u^2 - uv - v^2$ , où  $u$  et  $v$  sont des entiers relatifs premiers entre eux.

(a) Etablir les congruences  $(2u - v)^2 \equiv 5v^2$  modulo  $p$  et  $(u + 2v)^2 \equiv 5u^2$  modulo  $p$ .

(b) En déduire que  $5^q \equiv 1$  modulo  $p$ .

(c) Soit  $j$  un entier compris entre 1 et  $q$ , on note  $r_j$  le reste de la division de  $5j$  par  $p$ .

Si  $r_j \neq q$  on pose  $f(j) = r_j$  et  $\epsilon(j) = 1$ .

Dans ce cas on pose :  $f(j) = p - r_j$  et  $\epsilon(j) = -1$ , de sorte que l'on a dans tous les cas

$1 \leq f(j) \leq q$  et  $5j \equiv \epsilon(j)f(j)$  modulo  $p$ .

Montrer que les entiers  $f(1), f(2), \dots, f(q)$  sont deux à deux distincts et en déduire que le nombre d'entiers  $j$ , compris entre 1 et  $q$  et tels que  $\epsilon(j) = -1$ , est pair.

(d) Pour tout réel  $x$ , on note  $[x]$  sa partie entière,

à savoir le plus grand entier relatif inférieur ou égal à  $x$ .

Montrer que  $\left[ \frac{4p}{10} \right] - \left[ \frac{3p}{10} \right] + \left[ \frac{2p}{10} \right] - \left[ \frac{p}{10} \right]$  est pair, puis que  $p \equiv \pm 1$  modulo 10.

3. Soient  $(a, b, c)$  les longueurs des côtés d'un triangle  $W_e$ .

(a) Montrer que tous les facteurs premiers impairs de  $a$  sont congrus à 1 ou 9 modulo 10.

(b) Que peut-on dire des facteurs premiers de  $b$  ?

## Exercice 1

1. On a  $\varphi(x) = \frac{x}{2} + \left| \frac{x}{2} \right|$ .
2. Plus généralement, soit  $\gamma$  une fonction sur  $I = [-1, 1]$  vérifiant  $\gamma(0) = 0$  et pour laquelle il existe une constante positive  $k$  telle que  $|\gamma(x)| \leq k|x|$  pour tout  $x$  de  $I$ .  
La fonction  $\delta$  définie par  $\delta(x) = |kx + \gamma(x)| - |kx|$  coïncide avec  $\gamma$  pour  $x \geq 0$  et avec  $-\gamma$  pour  $x \leq 0$ .  
On obtient donc une solution en prenant  $\gamma(x) = \frac{t_2 - t_1}{2}(x)$  puis  $f(x) = \frac{t_2 + t_1}{2}(x) + \delta(x)$ .  
L'existence de  $k$  résulte du fait que  $(t_2 - t_1)(x)$  est de la forme  $Ax^2 + Bx$ .  $k = |A| + |B|$  convient.

## Exercice 2

1. (a) Dans le cas contraire, on aurait  $9! = 70 \times 72 \times 72 \leq 71^3$ , ce qui n'est pas avéré.  
(b) Par exemple :

1	8	9
2	5	7
3	4	6

2. On raisonne par l'absurde. Soit  $M$  le plus grand produit des lignes et des colonnes du carré. On sait que  $M \geq 72$ , et l'on peut supposer que  $M$  est le produit des éléments de la première ligne.

L'ensemble des produits strictement inférieurs à 90 que l'on peut former avec trois entiers distincts compris entre 1 et 9 est :

$\{6, 8, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 24, 27, 28, 30, 32, 35, 36, 40, 42, 45, 48, 54, 56, 60, 63, 64, 70, 72, 80, 84\}$ .

Supposons  $M = 84$ . Aucune autre ligne n'a un produit multiple de 7, mais un produit de ligne est multiple de 5. Les produits de lignes sont donc à l'ordre près  $(84, 80, 54)$  ou  $(84, 60, 72)$ .

À l'ordre près des termes sur chaque ligne, on n'a que les trois cas :

3	4	7	3	4	7	2	6	7
2	5	8	2	5	6	3	4	5
1	6	9	1	8	9	1	8	9

Supposons  $M = 80$ . Le produit de ligne multiple de 7 est nécessairement 63, et, toujours à l'ordre près, il n'y a qu'un cas :

2	5	8
1	7	9
3	4	6

Enfin pour  $M = 72$ , les produits de lignes sont 72, 70, 72 et il n'y a encore qu'un cas :

1	8	9
2	5	7
3	4	6

On constate que dans tous les cas les nombres 1 et 9 sont sur une même ligne, donc ne peuvent pas se trouver dans une même colonne.

L'exemple initial montre que la constante 90 est la plus grande possible.

## Problème

### Partie I : Géométrie

1. On a  $a^2 = b^2 + c^2$ . Les médianes issues de  $A$  et  $B$  ont, dans un repère orthonormal d'axes  $(AB)$  et  $(AC)$ , pour pentes respectives  $\sqrt{2}$  et  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ .
2. (a) Cercle de diamètre  $[AB]$ , privé des points  $A$  et  $B$ .  
 (b) Homothétie  $h(O, 3)$ ,  $O$  étant le milieu de  $AB$ .  
 (c) Soit  $\varphi$  la mesure de l'angle en  $O$  dans le triangle  $AOC$ . La formule d'EUCLIDE-AL KASCHI donne

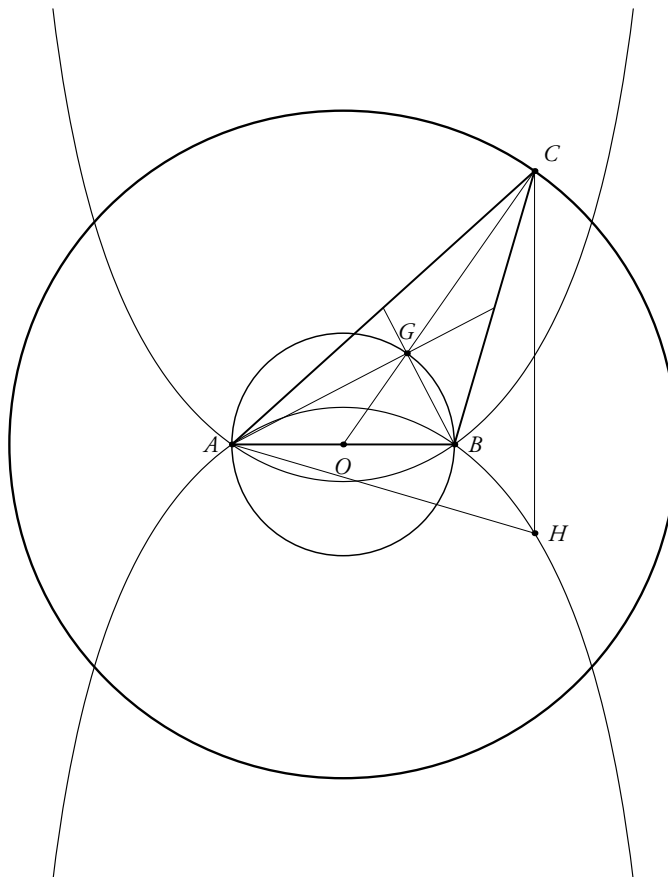
$$b^2 = c^2 \left( \frac{5}{2} - \frac{3}{2} \cos \varphi \right),$$

fonction dérivable de  $\varphi$ , à dérivée strictement positive, qui prend toutes les valeurs de l'intervalle  $]1, 4[$  lorsque  $\varphi$  décrit  $]0, \pi[$ . L'ensemble demandé est donc  $]1, 2[$ .

- (d) Si l'on note  $\theta = (\vec{i}, \vec{OC})$ ,  $H$  a pour abscisse  $3 \cos \theta$  et se trouve sur la hauteur issue de  $A$ , d'équation  $(3 \cos \theta - 1)(x + 1) + 3 \sin \theta y = 0$ , d'où  $f(x) = \frac{1 - x^2}{\sqrt{9 - x^2}}$ .

La dérivée de  $x \mapsto \frac{1 - x^2}{\sqrt{9 - x^2}}$  au point  $x$  est  $\frac{x(x^2 - 17)}{(9 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$ , du signe de  $-x$  sur l'intervalle d'étude  $]-3, 3[$ , d'où le tracé.

Les droites d'équations  $x = 3$  et  $x = -3$ , asymptotes verticales, n'ont pas été représentées.



3. (a) Si  $B'$  est le milieu de  $[AC]$ ,  $G$  décrit le cercle de diamètre  $B'A$  privé des points  $A$  et  $B'$ , et  $C$  s'en déduit dans  $h(B', 3)$ , et décrit un cercle de rayon  $\frac{3b}{2}$  et de centre  $O$  tel que  $\vec{AO} = -\frac{1}{4}\vec{AC}$ .

- (b) Soit  $\varphi$  la mesure de l'angle en  $O$  dans le triangle  $AOC$ . La formule d'EUCLIDE-AL KASCHI donne

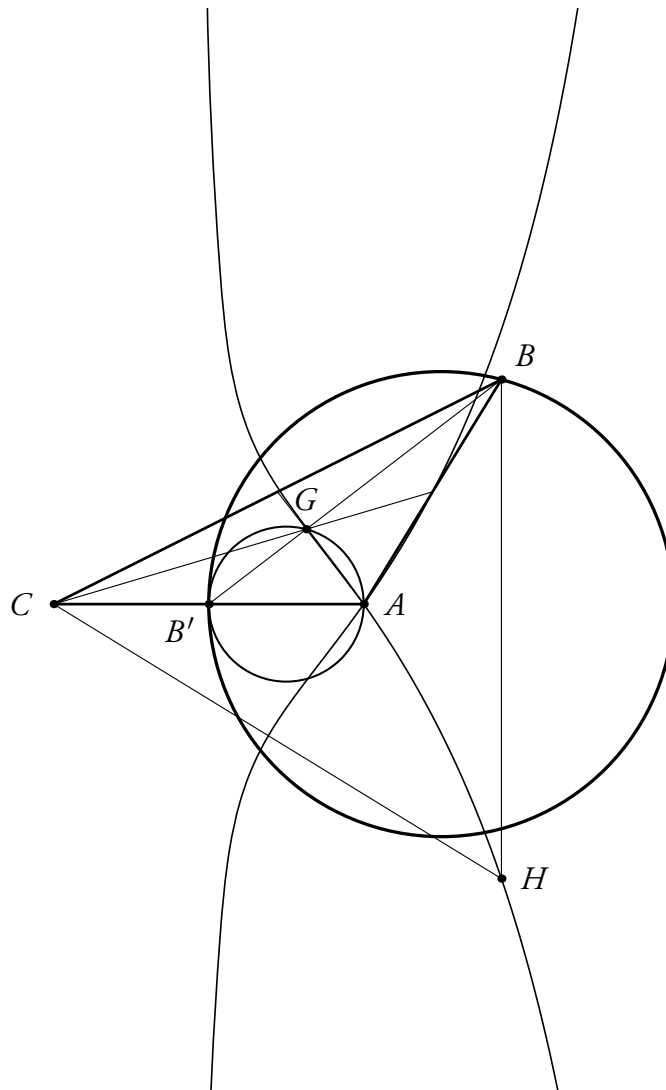
$$a^2 = b^2 \left( \frac{17}{8} - \frac{15}{8} \cos \varphi \right),$$

fonction dérivable de  $\varphi$ , à dérivée strictement positive, qui prend toutes les valeurs de l'intervalle  $\left] \frac{1}{4}, 4 \right[$  lorsque  $\varphi$  décrit  $]0, \pi[$ . L'ensemble demandé est donc  $]1/2, 2[$ .

- (c) Le cercle de rayon minimum passant par  $A$  et  $B$  est le cercle de diamètre  $[AB]$ , qui rencontre  $\Gamma'$  en deux points dont la projection  $K$  sur  $(AB)$  vérifie  $\vec{B'K} = \frac{1}{3}\vec{B'A}$ .

- (d) Si l'on note  $\theta = (\vec{i}, \vec{OB})$ ,  $H$  a pour abscisse  $3 \cos \theta$  et se trouve sur la hauteur issue de  $C$ , d'équation  $(3 \cos \theta + 1)(x + 5) + 3 \sin \theta y = 0$ , d'où les équations cartésiennes  $y = \pm \frac{(x+5)(x+1)}{\sqrt{9-x^2}}$ .

La dérivée de  $x \mapsto \frac{(x+5)(x+1)}{\sqrt{9-x^2}}$  au point  $x$  est  $\frac{-x^3 + 23x + 54}{(9-x^2)^{\frac{3}{2}}}$ ; le numérateur ne s'annule que pour une valeur de  $x$ , appartenant à l'intervalle  $]5, 6[$ , et la dérivée est par conséquent positive sur l'intervalle d'étude  $] -3, 3[$ , d'où le tracé. Cette fois encore, on n'a pas représenté les asymptotes verticales.



4. (a) On peut utiliser la formule de la médiane ou un calcul direct : l'orthogonalité des médianes se traduit par la relation  $(2 \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}) \cdot (2 \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}) = 0$ . Il suffit de développer et d'utiliser la relation d'EUCLIDE-AL KASHI.
- (b) La relation  $a^2 + b^2 = 5c^2$  entraîne clairement  $c^2 < (a + b)^2$ . En revanche la relation  $c^2 > (a - b)^2$  n'est vérifiée que si  $\frac{b}{a}$  rend strictement négatif le trinôme  $x \mapsto 2x^2 - 5x + 2$ , c'est à dire pour  $\frac{1}{2} < \frac{b}{a} < 2$ . On retrouve le résultat du 3.(b).

## Partie II : Arithmétique

### A. Deux familles de triangles

1. (a) Il est clair que tout diviseur premier commun à  $a$  (resp.  $b$ ) et  $c$  diviserait également  $b$  (resp.  $a$ ).  
Un diviseur premier, autre que 5, commun à  $a$  et  $b$ , diviserait  $c$ .  
Enfin si 5 divisait  $a$  et  $b$  sans diviser  $c$ , alors le premier membre de la relation  $(\star)$  serait divisible par 25, et le second membre seulement par 5, ce qui est absurde.
- (b) Si  $a$  et  $b$  étaient tous deux pairs, il devrait en être de même pour  $c$ , ce qui est contradictoire.

Si  $a$  et  $b$  étaient tous deux impairs, alors le premier membre de la relation  $(\star)$  serait congru à 2 modulo 4, ce qui est impossible pour le second membre.

- (c) La relation  $(\star)$  entraîne  $a^2 + b^2 + c^2 \equiv 0$  modulo 3 ce qui n'est possible que si  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont multiples de 3 – ce qui est exclu – ou premiers avec 3.

Les entiers  $u$  et  $v$  étant de parités différentes,  $u^2 - uv - v^2$  et  $u^2 + uv - v^2$  sont impairs, donc ni  $a$  ni  $b$  ne peuvent être multiples de 4.

Enfin il résulte de la question l'étude faite à la question précédente que ni  $a$  ni  $b$  ne peuvent être multiples de 5.

- (d) On a  $b^2 - 4a^2 = (b + 2a)(b - 2a)$ . Il suffit de remarquer que, par exemple, les deux conditions  $2a + b \equiv 0$  modulo 5 et  $-a + 2b \equiv 0$  modulo 5 sont équivalentes (le produit de la première congruence par 3 donne la seconde, le produit de la seconde par 2 redonne la première).

Remarquons pour la suite qu'alors si de plus  $0 < a < 2b$  et si  $b < 2a$ , alors le couple  $(\alpha, \beta)$  associé à  $(a, b)$  est, dans chaque cas, un couple d'entiers strictement positifs.

- (e) Il résulte des calculs du 1.(d) que si  $\alpha$  et  $\beta$  sont premiers entre eux, le PGCD de  $a$  et  $b$  est soit 1 soit 5, cette dernière éventualité étant réalisée si  $2\alpha - \beta \equiv 0$  modulo 5 dans le premier cas, ou si  $2\alpha + \beta \equiv 0$  modulo 5 dans le deuxième cas.

2. Application directe de ce qui précède, compte tenu du 1.(d).

3. Il s'agit d'abord de vérifier les conditions  $a > 0$ ,  $b > 0$  et  $\frac{1}{2} < \frac{b}{a} < 2$  (détermination de signes de trinômes).

La relation (1) demande que  $\frac{u}{v} > 3$  et la relation (2) que  $1 < \frac{u}{v} < 2$ .

Il faut également que  $a$  et  $b$  ne soient pas des multiples de 5, ce qui conduit dans le cas de la relation (1) à éviter les couples  $(u, v)$  tels que 5 divise  $u - 3v$ , dans le cas de la relation (2) à éviter les couples  $(u, v)$  tels que 5 divise  $u - 2v$ .

4. On constate que si, par exemple,  $2a - b$  et  $2a + b$  étaient tous deux multiples de 5, alors il en serait de même pour  $a$  et  $b$ .

5. On trouve 2 triangles de type 1 et 3 de type 2 :

$v \backslash u$	3	4	5	6
1		(22,31,17)		(58,59,37)
2	(22,19,13)			
3		(38,41,25)		
4			(58,71,41)	

## B. Entiers de la forme $u^2 - uv - v^2$ et leurs diviseurs

1. En utilisant les relations  $\omega^2 = \omega + 1$  et  $\omega'^2 = \omega' + 1$  il vient :

$$(u^2 - uv - v^2)(u'^2 - u'v' - v'^2) = U^2 - UV - V^2$$

avec  $U = uu' + vv'$  et  $V = uv' + u'v - vv'$ .

Le trinôme  $x^2 + 4x - 1$  se prête à des calculs analogues.

2. (a) Comme 4 et  $p$  sont premiers entre eux, la relation  $u^2 - uv - v^2 \equiv 0$  modulo  $p$  équivaut à  $4u^2 - 4uv - 4v^2 \equiv 0$  modulo  $p$  soit  $(2u - v)^2 \equiv 5v^2$  modulo  $p$  ou bien encore  $(u + 2v)^2 \equiv 5u^2$  modulo  $p$ .

- (b) Comme  $u$  et  $v$  sont premiers entre eux,  $p$  est premier avec  $u$  ou avec  $v$ .

Supposons que ce soit avec  $v$ ; comme  $p$  est strictement supérieur à 5, il ne divise pas  $5v^2$ , ni par conséquent  $2u - v$ .

On a alors  $(2u - v)^{2q} \equiv 5^q v^{2q}$  modulo  $p$ , ce qui, par le théorème de FERMAT, s'écrit  $5^q \equiv 1$  modulo  $p$ .

- (c) Soient  $j$  et  $j'$  deux entiers distincts compris entre 1 et  $q$ . Comme  $p$  est premier avec 5,  $r_j$  et  $r_{j'}$  sont distincts. Si  $r_j + r_{j'} = p$ , alors  $p$  divise  $j + j'$ , ce qui est absurde car  $3 \leq j + j' \leq p - 2$ .

Il s'en suit que l'ensemble  $\{f(1), f(2), \dots, f(q)\}$  coïncide avec  $\{1, 2, \dots, q\}$ , et qu'en multipliant les congruences  $5j \equiv \varepsilon(j)f(j)$  modulo  $p$  on obtient :

$$5^q q! \equiv q! \varepsilon(1)\varepsilon(2) \cdots \varepsilon(q) \text{ modulo } p,$$

ce qu'il fallait démontrer.

- (d) Lorsque  $j$  varie de 1 à  $q$ , on a  $\varepsilon(j) = 1$  tant que  $5j < p/2$ , puis  $\varepsilon(j) = -1$  jusqu'à ce que  $5j$  dépasse  $p$ , etc. On obtient le résultat demandé.

La fonction  $x \mapsto \left\lfloor \frac{4x}{10} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{3x}{10} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2x}{10} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{10} \right\rfloor$  augmente de 2 lorsque  $x$  augmente de 10. Il suffit donc d'étudier sa parité pour  $x$  égal à 1, 3, 7 et 9, ce qui est aisé.

3. (a) Vu au 2.

- (b) On a  $-u^2 + 4uv + v^2 = 5v^2 - (u - 2v)^2 = (v + 2u)^2 - 5u^2$ . En utilisant un raisonnement identique à celui de la question précédente, on voit que  $b$  n'a que des facteurs premiers congrus à 1 ou 9 modulo 10.