BACCALAUREAT 2003 SERIE S : SUJET POSE A LA REUNION

Exercice 1 *(6 points)*

Commun à tous les candidats

Cet exercice comporte 3 questions indépendantes.
Une question comporte 4 affirmations repérées par les lettres *a.*, *b.*, *c.*, *d.*
Aucune justification n'est demandée pour cet exercice.
Vous devez indiquer pour chacune d'elles si elle est vraie ou fausse.
Vous inscrirez en toutes lettres « VRAI » ou « FAUX » dans la case correspondante du tableau donné en annexe à rendre avec la copie.

1. Une urne contient 75 boules blanches et 25 boules noires. L'expérience élémentaire consiste à tirer une boule. Les boules ont toutes la même probabilité d'être tirées. On effectue n tirages indépendants et sans remise, n désignant un entier supérieur à 10. Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de boules blanches tirées.	*a.* X suit une loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{4}$. *b.* $P(X=0)=\frac{1}{2^{2n}}$ *c.* $P(X<5)=1-P(X>5)$ *d.* $E(X)=0{,}75\,n$
2. Une maladie atteint 1 % d'une population donnée. Un test de dépistage de cette maladie a les caractéristiques suivantes : • Chez les individus malades, 99 % des tests sont positifs et 1 % négatifs. • Chez les individus non malades, 98 % des tests sont négatifs (les autres étant positifs). Un individu est choisi au hasard dans cette population et on lui applique le test. On note M l'événement : « l'individu est malade » et T l'événement : « le test pratiqué est positif ».	*a.* $P_M(T)+P_{\overline{M}}(T)=1{,}01$ *b.* $P_M(T)+P_{\overline{M}}(T)=P(T)$ *c.* $P(T)=2{,}97.10^{-2}$ *d.* Sachant que le test est positif, il y a deux chances sur trois pour que l'individu testé ne soit pas malade.
3. La durée d'attente en secondes à la caisse d'un supermarché est une variable aléatoire Y qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,01. Alors :	*a.* La densité de probabilité de Y est la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $f(t)=e^{-0{,}01t}$. *b.* Pour tout réel t positif, $P(Y\leq t)=1-e^{-0{,}01t}$ *c.* La probabilité d'attendre moins de 3 minutes à cette caisse est, à 0,01 près, égale à 0,16. *d.* Il y a plus d'une chance sur deux que l'attente à cette caisse soit supérieure à une minute.

Exercice 2 *(5 points)*

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O\ ;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$. On prendra 1 cm pour unité graphique.

On considère l'application f du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = -\left(\sqrt{3}+i\right)z - 1 + i\left(1+\sqrt{3}\right)$.

1. Montrer que f est une similitude directe dont le centre Ω a pour affixe i. En déterminer le rapport et l'angle.

2. Soit M_0 le point d'affixe $z_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{3}{4}i$.

   Calculer ΩM_0 et donner une mesure en radians de l'angle $\left(\vec{u},\ \overrightarrow{\Omega M_0}\right)$.

3. On considère la suite de points $(M_n)_{n\geq 0}$ définie pour tout entier naturel n par $M_{n+1} = f(M_n)$. On note z_n l'affixe du point M_n.

   a. Placer les points Ω, M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4.

   b. Montrer par récurrence, pour tout entier naturel n, l'égalité : $z_n - i = 2^n e^{i\frac{7n\pi}{6}}\left(z_0 - i\right)$.

   c. Pour tout entier naturel n, calculer ΩM_n puis déterminer le plus petit entier n tel que $\Omega M_n \geq 10^2$.

4. *a.* On considère l'équation (E) : $7x - 12y = 1$ où x et y sont deux entiers relatifs. Après avoir vérifié que le couple $(-5,\ -3)$ est solution, résoudre l'équation (E).

   b. Soit Δ l'ensemble des points M du plan d'affixe z telle que $\operatorname{Im}(z) = 1$ et $\operatorname{Re}(z) \geq 0$. Caractériser géométriquement Δ et le représenter.

   Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que M_n appartienne à la demi-droite d'origine Ω dirigée par le vecteur $\vec{u}$. Préciser son plus petit élément.

Problème *(9 points)*

Commun à tous les candidats

On considère l'équation différentielle (E) : $y - y' = \dfrac{e^x}{x^2}$ et on cherche l'ensemble des solutions de cette équation définies sur] 0 ; +∞ [.

1. *a.* Démontrer que la fonction u définie sur] 0 ; +∞ [par $u(x) = \dfrac{e^x}{x}$ est solution de (E).

   b. Démontrer qu'une fonction v définie sur] 0 ; +∞ [est solution de (E) si et seulement si la fonction $v - u$, définie sur] 0 ; +∞ [, est solution de l'équation différentielle $y - y' = 0$.

   c. En déduire toutes les solutions définies sur] 0 ; +∞ [de l'équation (E).

2. Pour tout réel k négatif ou nul, on considère la fonction f_k définie sur] 0 ; +∞ [par

$$f_k(x) = \frac{kx+1}{x}\ e^x$$

   a. Déterminer les limites de f_k en 0 et en +∞.

   b. Calculer $f_k'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle] 0 ; +∞ [et déterminer le nombre de solutions sur] 0 ; +∞ [de l'équation $f_k'(x) = 0$.

3. On note C_k la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ )$.

   On a tracé sur le graphique ci-joint les courbes C_{-1}, $C_{-0,25}$, $C_{-0,15}$ et C_0.

   En utilisant la deuxième question, reconnaître chaque courbe (les réponses doivent être justifiées).

4. Pour tout réel a strictement positif, on pose $A(a) = \displaystyle\int_a^{a+1} \frac{e^x}{x}\,\mathrm{d}x$.

   a. Interpréter géométriquement $A(a)$.

   b. On désigne par F une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{e^x}{x}$ sur] 0 ; +∞ [.

   En remarquant que $A(a) = F(a+1) - F(a)$ étudier le sens de variation de la fonction qui à tout réel a élément de] 0 ; +∞ [associe le réel $A(a)$.

   c. On veut découper dans le plan une bande verticale de largeur une unité de telle sorte que l'aire située dans cette bande entre les courbes C_0 et (Ox) soit minimale.

   Comment doit on procéder ?

Annexe du problème