Chapitre 3

Suites

1 A propos de $\mathbb{R}$

1.1 Insuffisance de $\mathbb{Q}$

On note $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres de la forme $\frac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. Ces nombres ne permettent pas de mesurer toutes les longueurs existantes.

Par exemple, la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1 ne peut se mettre sous la forme $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. Montrons cela en raisonnant par l'absurde :

Si tel est le cas il existe des entiers non nuls p et q tels que la fraction $\frac{p}{q}$ soit irréductible (non simplifiable) et tels que $(\frac{p}{q})^2 = 2$. On a alors $p^2 = 2q^2$.
On en déduit que p^2 est un entier pair. Comme les carrés des entiers pairs sont pairs et que les carrés des entiers impairs sont impairs, p est pair.
Il existe donc un entier p' tel que $p = 2p'$. On obtient alors $2(p')^2 = q^2$. q^2 est donc pair, ainsi que q.
Les nombres p et q étant tous les deux pairs la fraction $\frac{p}{q}$ est simplifiable. On obtient une contradiction.

Le nombre 2 n'est donc pas le carré d'un nombre de la forme $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.

Les grecs ont mis longtemps avant de l'accepter. Ils appelèrent ce nombre (dont le carré vaut 2) irrationnel.
Les éléments de $\mathbb{Q}$ sont appelés les nombres rationnels.
Cela pose la nécessité d'un ensemble de nombres plus grand que $\mathbb{Q}$.

D'autres nombres comme $\sqrt{3}$, π ou e sont irrationnels. (Pour l'irrationnalité de e voir l'exercice **6.11**).

Développement décimal d'un rationnel

Effectuer la division de 22 par 7 de façon à obtenir les 12 premières décimales de $\frac{22}{7}$. Pouvez-vous donner toutes les décimales de $\frac{22}{7}$? Quelle propriété intéressante a ce développement décimal?

Plus généralement on a :

Proposition 1.1.1 *Tout nombre rationnel positif admet un développement décimal périodique, c'est-à-dire de la forme*

$$M, a_1 \dots a_d b_1 \dots b_T b_1 \dots b_T b_1 \dots$$

1.2 Quelques définitions

Donnons une définition de $\mathbb{R}$.

Définition 1.2.1 *Un* réel positif *peut être vu, sous forme numérique, comme un entier suivi d'une infinité de chiffres constituant sa partie décimale.*

Exemple : $2,010011000111000011110\dots$ est un nombre réel. Mais il n'est pas rationnel d'après la proposition 1.1.1.

Si $x = M, d_1 d_2 d_3 \dots$ où $M \in \mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $d_n \in \{0, 1, \dots, 9\}$, cela signifie que,

$$M \leq x \leq M + 1 \quad , \quad M + \frac{d_1}{10} \leq x \leq M + \frac{d_1 + 1}{10}$$

et plus généralement pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$M + \frac{d_1}{10} + \cdots + \frac{d_n}{10^n} \leq x \leq M + \frac{d_1}{10} + \cdots + \frac{d_n + 1}{10^n}$$

Exemples : $\sqrt{2} = 1,4142135623730950488...$, $\pi = 3,1415926535897932385...$
On verra par la suite comment obtenir les premières décimales de $\sqrt{2}$.

Définition 1.2.2 (partie entière) *Pour tout réel x il existe un unique entier, noté $E(x)$, tel que $E(x) \leq x < E(x) + 1$. $E(x)$ est appelée* partie entière *de x.*

Exemple : La partie entière de $12,21$ est 12 et celle de $-0,17$ est -1.

Définition 1.2.3 (distance dans $\mathbb{R}$) *La* distance *usuelle entre deux nombres x et y est le nombre positif $|x - y|$.*

On a les propriétés suivantes : pour tous x et y réels,

$$|x + y| \leq |x| + |y| \ ,$$

$$||x| - |y|| \leq |x - y| \ .$$

Elles sont connues sous le nom d'inégalités triangulaires.

1.2.4 Intervalles : Soient a et b deux nombres réels vérifiant $a < b$; les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ suivants sont appelés intervalles :

$$I_1 = [a,b] = \{x \in \mathbb{R}/\, a \le x \le b\} \quad , \quad I_2 =]a,b] = \{x \in \mathbb{R}/\, a < x \le b\}$$
$$I_3 = [a,b[= \{x \in \mathbb{R}/\, a \le x < b\} \quad , \quad I_4 =]a,b[= \{x \in \mathbb{R}/\, a < x < b\}$$
$$I_5 =]-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R}/\, x \le a\} \quad , \quad I_6 =]-\infty,a[= \{x \in \mathbb{R}/\, x < a\}$$
$$I_7 = [a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R}/\, a \le x\} \quad , \quad I_8 =]a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R}/\, a < x\}$$
$$I_9 =]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}$$

Ils n'ont pas de *trou.* C'est-à-dire que si deux nombres x et y appartiennent à un intervalle I, tous les nombres compris entre x et y appartiennent également à I.
En fait, cette propriété les caractérise; c'est-à-dire qu'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ qui n'a pas de trou est un intervalle.

Les quatres premiers sont appelés intervalles *bornés.* Les cinq suivants sont non bornés. La longueur des intervalles bornés, c'est-à-dire la distance entre les deux extrémités, est $b - a$.

Les intervalles I_4, I_6, I_8, I_9 sont dits *ouverts.* Les intervalles I_1, I_5, I_7, I_9 sont appelés intervalles *fermés.* Les intervalles I_2 et I_3 ne sont ni fermés ni ouverts.

L'intervalle I_1, à la fois fermé et borné, est appelé *segment.*

2 Définitions et exemples de suites

2.1 Introduction, définition d'une suite

Exemples historiques

- Approximation d'une racine carrée. Les babyloniens (2000 avant JC) donnent comme approximation de $\sqrt{a}$ (où a est un entier) la quantité $\frac{1}{2}(b + \frac{a}{b})$ où b est un nombre arbitraire, en pratique proche de $\sqrt{a}$, par exemple sa partie entière.
Le procédé peut être itéré. On peut par exemple choisir b_0 arbitraire dans $]\sqrt{a}, +\infty[$ puis définir

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_n & = & \frac{a}{b_n} \\ b_{n+1} & = & \frac{a_n+b_n}{2} \end{array} \right.$$

Géométriquement cela s'interprète de la façon suivante : soit un rectangle de côtés a_0 et b_0, son aire est a. On cherche à construire un carré dont l'aire est a. On construit d'abord le rectangle dont l'un des côtés est la moyenne arithmétique de a_0 et b_0 (c'est-à-dire $\frac{a_0+b_0}{2}$) et dont l'aire est a. Puis on itère le procédé.
Cela permet d'approximer $\sqrt{2}$ par des rationnels, puis d'obtenir autant de ses décimales que l'on veut, comme nous le verrons un peu plus loin.

- Approximation de π. (voir l'exercice **6.8**).

Définition 2.1.1 *Une* suite *réelle (resp. complexe) est une application de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{R}$ *(resp.* $\mathbb{C}$*). L'image de l'entier* n *par l'application* u*,* $u(n)$*, se note en pratique* u_n*, et l'application* u *se note habituellement* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$*. On dit que* u_n *est le terme général de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$*. (Il arrive que* $\mathbb{N}$ *soit remplacé par* $\mathbb{N}^*$*,* $\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ *etc.)*

Exemples : On peut définir une suite de différentes manières :

- De façon explicite : $x_n = (-1)^n n!$, $y_n = e^{in}$, $y'_n = (1+i)^n$, $z_n = f(n)$ où f est une application de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$, $v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(k)$.

- Par récurrence : $w_{n+1} = g(w_n)$ où g est une application et w_0 est donné, $t_{n+1} = t_n + t_{n-1}$ avec $t_0 = 1$ et $t_1 = 1$. Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont aussi définies par récurrence.

Représentation graphique d'une suite réelle : Un repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ étant donné, le graphe d'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est l'ensemble des points de coordonnées (n, u_n).

Il peut être intéressant aussi de représenter les termes d'une suite réelle sur l'axe réel et les termes d'une suite complexe dans le plan complexe.

2.2 Suites particulières

2.2.1 Suites arithmétiques

Exemple : en économie : les intérêts simples.
Une personne place un capital de 1000 euros à intérêts simples aux taux annuel de 4%, c'est à dire qu'à la fin de chaque année on lui donne un intérêt égal à 4% de la somme déposée initialement (1000 euros).
Naturellement, cette personne désire connaître la somme dont elle disposera au bout d'un an, deux ans, ... (par somme dont elle disposera on entend capital initial plus intérêt).
Pour noter plus aisément ces sommes, on définit une suite de réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $u_0 = 1000$ est la somme placée initialement, u_1 désigne la somme au terme d'une année, $\cdots, u_n$ désigne la somme au terme de n années,$\cdots$
La somme disponible :
- au bout d'un an est : $u_1 = u_0 + u_0 \times \frac{4}{100} = 1000 + 40 = 1040$ euros.
- au bout de deux ans est : $u_2 = u_1 + u_0 \times \frac{4}{100} = 1040 + 40 = 1080$ euros.
On remarquera que l'on passe d'un terme à son suivant en ajoutant le même réel : 40.
On traduit cette propriété en disant : pour tout naturel n on a $u_{n+1} = u_n + 40$ $(*)$. Ainsi la connaissance de $u_0 = 1000$ et la relation $(*)$ permet de calculer de proche en proche $u_0,\ u_1,\ u_2, \cdots,\ u_n, \cdots$

Définition 2.2.2 *On dit que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite* arithmétique *de raison* r *et de premier terme* a *si* $u_0 = a$ *et* $u_{n+1} - u_n = r, \quad$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Revenons à l'exemple; il y a une méthode plus rapide pour calculer u_n, en effet $u_1 = u_0 + 40$, $u_2 = u_1 + 40 = u_0 + 2\times 40 \cdots\ u_n = u_0 + n \times 40$ (raisonnement par récurrence).

On a la définition équivalente :

Définition 2.2.3 *On dit que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite* arithmétique *de raison* r *et de premier terme* a *si* $u_n = a + n \times r$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r et de premier terme a.

On pose $S_p = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_p = \sum_{k=0}^{p} u_k$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

En utilisant la définition d'une suite arithmétique on obtient

$$u_0 + u_p = u_k + u_{p-k} \quad \text{pour tout } p \geq 0 \text{ et } 0 \leq k \leq p.$$

puis on en déduit pour tout $p \in \mathbb{N}$

$$2S_p = (p+1)(u_0 + u_p) = (p+1)(2u_0 + p \times r)\,,$$

d'où

$$S_p = \frac{1}{2}(p+1)(2u_0 + p \times r).$$

Exemple : pour tout p entier, on a $1 + 2 + 3 + \cdots + p = \frac{1}{2}(p+1)p$.

2.2.4 Suites géométriques

Exemple : en physique : la radioactivité.

Un corps radioactif est un corps dont les atomes se désintègrent spontanément et donnent naissance à des atomes d'un autre corps en émettant des particules élémentaires. Le nombre d'atomes qui se désintègrent dans un intervalle de temps donné est fonction du nombre d'atomes présents dans l'échantillon étudié. Ainsi, pour le radium 226, en un an, le taux d'atomes désintégrés est d'environ $0,04\%$ (4 atomes pour 10000).

Supposons qu'initialement il y ait $N_0 = 1250 \times 10^{16}$ atomes; nous voulons déterminer combien il en reste au bout d'un an, deux ans, $\cdots$, n années, $\cdots$ On définit ainsi une suite $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Le nombre d'atomes au bout d'un an est : $N_1 = N_0 - N_0 \times \frac{4}{10000} = (1 - \frac{4}{10000})N_0 = 0,9996 N_0 = 1249,5 \times 10^{16}$, $N_2 = (1 - \frac{4}{10000})N_1 = 0,9996 N_1$ et par un raisonnement de récurrence, on montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $N_{n+1} = 0,9996 N_n$.

Déterminer le nombre $N_2,\ N_3,\ N_4$.

On passe donc d'un terme à son suivant en multipliant toujours par le même réel $0,9996$. Donc la suite $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par la donnée de $N_0 = 1250 \times 10^{16}$ et de la relation $N_{n+1} = 0,9996 N_n$ pour tout entier n.

Définition 2.2.5 *On dit que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite* géométrique *de raison* q *et de premier terme* a *si* $u_0 = a$ *et* $u_{n+1} = q \times u_n$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Revenons à l'exemple; il y a une méthode plus rapide pour calculer u_n, en effet $N_1 = 0,9996 N_0$, $N_2 = 0,9996 N_1 = (0,9996)^2 N_0 \cdots$ $N_n = (0,9996)^n N_0$ (raisonnement par récurrence).

On a la

Définition 2.2.6 *On dit que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite* géométrique *de raison* q *et de premier terme* a *si* $u_n = q^n \times a, \quad$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique

Soit $(u_n)_n$ une suite géométrique de raison q et de premier terme a.

On pose $S_p = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_p = \sum_{k=0}^{p} u_k$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

On a $(1-q)S_p = S_p - qS_p = u_0 - q^{p+1}u_0$. On en déduit que pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$S_p = u_0 \frac{1-q^{p+1}}{1-q}, \ \textit{si } q \neq 1 \quad \textit{et} \quad S_p = (p+1)u_0 \ \textit{si } q = 1.$$

Exemple : soit $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, on a $1 + q + q^2 + \cdots + q^p = \dfrac{1-q^{p+1}}{1-q}$.

2.2.7 Suites arithmético-géométriques

Définition 2.2.8 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite. On dit que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite* arithmético-géométrique *si*

$$u_{n+1} = au_n + b, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},$$

avec $a, b \in \mathbb{C}$.

Remarque : Dans le cas où $b = 0$ on retrouve la définition d'une suite géométrique et dans le cas où $a = 1$ on retrouve la définition d'une suite arithmétique.

Etudions le cas $a \neq 1$ pour une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence

$$u_{n+1} = au_n + b, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}\ .$$

La suite constante $\frac{b}{1-a}$ vérifie cette relation. Posons $v_n = u_n - \frac{b}{1-a}$; on a $v_{n+1} = av_n$ et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique. On a alors pour tout n dans $\mathbb{N}$, $v_n = v_0 a^n$ puis $u_n = (u_0 - \frac{b}{1-a})a^n + \frac{b}{1-a}$.

Exemple : en économie : les intérêts composés.

Un prêteur dispose d'une somme S qu'il consent à prêter au taux d'intérêt mensuel t. Un emprunteur demande à recevoir cette somme S en contrepartie d'un paiement mensuel d'une somme s, pendant n mensualités. Quelle est la valeur de s en fonction de S, t et n ?

Indication : Au moment de payer la $k$ième mensualité, l'emprunteur a déjà remboursé une partie du capital. Soit u_k le capital restant à rembourser après le $k$ième versement, de sorte que $u_0 = S$ et $u_n = 0$. Le paiement de la mensualité s consiste d'une part à rembourser la partie du capital $u_{k-1} - u_k$, d'autre part à payer des intérêts sur le capital u_{k-1} pendant un mois, i.e. $s = u_{k-1} - u_k + t \times u_{k-1}$.

3 Limite d'une suite

3.1 Définitions

Définition 3.1.1 *Dans $\mathbb{C}$, on appelle disque ouvert de centre a et de rayon r l'ensemble $D = \{z \in \mathbb{C} / \, |z - a| < r\}$.*

La nécessité des définitions suivantes est apparue au cours du XIXème siècle. Elles se substituent aux concepts intuitifs qui avaient prévalu jusque là.

Définition 3.1.2 *On a*
(i) Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l si tout intervalle ouvert contenant l contient tous les termes de la suite sauf un nombre fini.

On dit qu'une suite réelle converge vers l par valeurs supérieures (resp. inférieures) si de plus tous les termes de la suite sauf un nombre fini sont plus grands que l (resp. plus petits que l).

Une suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l si tout disque ouvert contenant l contient tous les termes de la suite sauf un nombre fini.

(ii) Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ si tout intervalle $]A, +\infty[$ contient tous les termes de la suite sauf un nombre fini.

Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ si tout intervalle $]-\infty, A[$ contient tous les termes de la suite sauf un nombre fini.

On peut formaliser ces définitions d'une autre façon, qui s'avère bien pratique puisqu'elle se traduit sous forme d'inégalités :

Définition 3.1.3 *On a*
(i) Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (réelle ou complexe) converge vers l si :

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists N \in \mathbb{N} \ , \ \forall n \geq N \ , \ |u_n - l| < \varepsilon$$

(ii) Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ si :

$$\forall A \ , \ \exists N \in \mathbb{N} \ , \ \forall n \geq N \ , \ u_n > A$$

Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ si :

$$\forall A \ , \ \exists N \in \mathbb{N} \ , \ \forall n \geq N \ , \ u_n < A$$

Remarque importante : D'après le (i) de la définition 3.1.3, dire qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (réelle ou complexe) converge vers l signifie que la suite $(u_n - l)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, ou encore que la suite $(|u_n - l|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Proposition 3.1.4 *Si une suite admet une limite, finie ou infinie, celle-ci est unique.*

Preuve : montrons-le par l'absurde dans le cas d'une suite réelle.
Supposons que la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admette deux limites finies l_1 et l_2 avec $l_1 < l_2$. L'intervalle $]l_1-1, \frac{l_1+l_2}{2}[$ qui contient l_1, contient tous les termes de la suite sauf un nombre fini. Donc l'intervalle $]\frac{l_1+l_2}{2}, l_2+1[$, qui contient l_2, ne contient qu'un nombre fini de termes de la suite, ce qui contredit la convergence de la suite vers l_2.
Supposons maintenant que l_1 est finie et l_2 infinie. On peut supposer $l_2 = +\infty$. L'intervalle $]l_1-1, l_1+1[$ qui contient l_1, contient tous les termes de la suite sauf un nombre fini. Donc l'intervalle $]l_1+1, +\infty[$ ne contient qu'un nombre fini de termes de la suite, ce qui contredit le fait que la suite admette $+\infty$ comme limite.
Supposons maintenant que $l_1 = -\infty$ et $l_2 = +\infty$. L'intervalle $]-\infty, 0[$ contient tous les termes de la suite sauf un nombre fini donc ce n'est pas le cas pour l'intervalle $]0, +\infty[$, ce qui contredit le fait que la suite admette $+\infty$ comme limite.

Une suite qui *converge* est une suite qui tend vers une *limite finie*.

Si une suite ne converge pas on dit qu'elle *diverge*. Une suite *divergente* peut donc ne pas avoir de limite ou admettre une limite infinie.

Remarque : -Si l'on modifie les premiers termes ou un nombre fini de termes d'une suite on ne change pas son *comportement à l'infini* (le fait qu'elle admette une limite ou pas et la valeur de cette limite si elle existe).

Exemples : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ donc la suite $(\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
$(-1)^n + \frac{1}{n}$ n'admet pas de limite donc la suite $((-1)^n + \frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge.

Définition 3.1.5 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.*
1. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée *si il existe un réel M tel que $u_n \leq M$ pour tout entier naturel n.*
2. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée *si il existe un réel m tel que $u_n \geq m$ pour tout entier naturel n.*
3. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée *si elle est majorée et minorée, c'est à dire s'il existe deux réels m, M tels que $m \leq u_n \leq M$ pour tout entier naturel n.*

Remarque : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si il existe $C > 0$ tel que $|u_n| \leq C$ pour tout entier n.

Proposition 3.1.6 *Toute suite convergente est bornée.*

Preuve : Si une suite converge vers l, il suffit de remarquer que l'intervalle borné $]l-1, l+1[$ contient tous les termes de la suite sauf un nombre fini. Les termes en nombre fini, n'appartenant pas à $]l-1, l+1[$, appartiennent à un intervalle borné.

Remarque : La réciproque est fausse. La suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ en est un contre-exemple. En effet, la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas puisque les intervalles $]-2, 0[$ et $]0, 2[$ contiennent tous deux une infinité de termes de la suite.

Il est parfois plus facile d'étudier les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, d'où l'intérêt de cette proposition :

Proposition 3.1.7 *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers l si et seulement si les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers l. (l peut être finie ou infinie).*

Preuve : nous traiterons seulement le cas où la limite l est finie. Supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l. Un intervalle ouvert contenant l contient tous les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sauf un nombre fini, donc il contient tous les termes d'indice pair et tous les termes d'indice impair de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sauf un nombre fini. Les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent donc vers l.
Réciproquement, supposons que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers l. Un intervalle ouvert contenant l contient tous les termes d'indice pair de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sauf un nombre fini et tous les termes d'indice impair de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sauf un nombre fini. Il contient donc tous les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sauf un nombre fini. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers l.

Limites des suites de référence

Proposition 3.1.8 *Soit q un nombre complexe et α un réel.*
- Si $|q| < 1$, la suite complexe $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
- Si $q > 1$ ($q \in \mathbb{R}$), la suite réelle $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
- Si $\alpha > 0$, $(n^\alpha)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$.
- Si $\alpha < 0$, $(n^\alpha)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

3.2 Opérations sur les limites

Beaucoup de suites s'expriment à l'aide de la somme, du produit, du quotient de suites de référence (dont on connait la limite), d'où l'intérêt d'énoncer ce type de propriétés :

Proposition 3.2.1 *On a :*
(i) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l' alors $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l+l'$.
(ii) Dans $\mathbb{R}$, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l ou tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) alors $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).
(iii) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l' alors $(u_nv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ll'.
(iv) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \neq 0$ ou tend vers ∞ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ∞ alors $(u_nv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ∞.
(v) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \neq 0$ alors $(\frac{1}{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{1}{l}$.
(vi) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\pm\infty$ alors $(\frac{1}{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
(vii) Dans $\mathbb{R}$, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 par valeurs supérieures (resp. inférieures) alors $(\frac{1}{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ (si elle est définie) tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Exemple : Soit $v_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}$. On a $v_n = \frac{1-(1/2)^{n+1}}{1-1/2}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \frac{1-0}{1-1/2} = 2$.

Exercice : Et la somme d'une suite convergente et d'une suite divergente ou la somme de deux suites divergentes, que peut-on en dire? Et le produit?

3.3 Passage à la limite dans les inégalités

Pour obtenir des renseignements sur la limite d'une suite réelle, il est parfois plus pratique de la comparer à des suites de référence ou en tout cas plus simples à étudier. Nous avons alors besoin de ce genre de propriétés :

Proposition 3.3.1 *Les suites* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont réelles.*
(i) Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$ *et* $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ *alors* $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
(ii) Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$ *et* $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ *alors* $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
(iii) Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$ *et* $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$, $\lim_{n\to+\infty} v_n = l'$ *alors* $l \leq l'$.
(iv) Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq w_n \leq v_n$ *et* $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = l$ *alors* $\lim_{n\to+\infty} w_n = l$.
(Les gendarmes).

Preuve : (i) Tout intervalle $]a, +\infty[$ contient tous les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sauf un nombre fini, il contient donc clairement d'après l'inégalité tous les termes de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sauf un nombre fini.
(ii) Se montre de la même façon que (i).
(iii) Nous allons faire une démonstration par l'absurde. Supposons que $l > l'$. L'intervalle $]l' - 1, \frac{l+l'}{2}[$ contient l' donc contient tous les termes de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sauf un nombre fini. D'après l'inégalité l'intervalle $]\frac{l+l'}{2}, l+1[$ qui contient l ne contient qu'un nombre fini de termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ce qui contredit la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers l. Donc $l \leq l'$.
(iv) Tout intervalle contenant l contient tous les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sauf un nombre fini et tous les termes de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sauf un nombre fini. D'après l'encadrement il contient donc tous les termes de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sauf un nombre fini.

Remarque : Si dans (iii) on remplace l'inégalité large par une inégalité stricte dans l'hypothèse, l'inégalité stricte n'est pas conservée dans la conclusion.
Par exemple, pour tout $n \geq 1$ on a $1 - \frac{1}{n} < 1 + \frac{1}{n}$ et pourtant $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{n}$.

Exemple : Pour tout $n \geq 1$ on a $n! \geq 2^{n-1}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^{n-1} = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n! = +\infty$.

Application
Il y a un lien entre la convergence des suites réelles et celle des suites complexes :

Proposition 3.3.2 *Une suite complexe* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* l *si et seulement si* $(Re\, u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $Re\, l$ *et* $(Im\, u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $Im\, l$.

Preuve : en utilisant l'égalité $u_n = Re\, u_n + i\, Im\, u_n$ et la proposition 3.2.1 on a la première partie de la proposition. Les inégalités $|Re\, u_n - Re\, l| \leq |u_n - l|$ et $|Im\, u_n - Im\, l| \leq |u_n - l|$ et la proposition 3.3.1 donnent la deuxième partie de la proposition.

4 Théorèmes fondamentaux

Dans cette partie les suites sont réelles.

4.1 Sens de variation d'une suite

Définition 4.1.1 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle.*
1. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est* croissante *si pour tout entier naturel* n,

$$u_n \leq u_{n+1}.$$

2. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est* décroissante *si pour tout entier naturel* n,

$$u_n \geq u_{n+1}.$$

3. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est* monotone *si elle est croissante ou décroissante.*

Définition 4.1.2 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle.*
1. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est* strictement croissante *si pour tout entier naturel* n,

$$u_n < u_{n+1}.$$

2. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est* strictement décroissante *si pour tout entier naturel* n,

$$u_n > u_{n+1}.$$

3. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est* strictement monotone *si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.*

Exemple : Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle; on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$u_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

Si l'on suppose que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $a_n \geq 0$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. En effet, pour tout n, $u_{n+1} - u_n = a_{n+1} \geq 0$.

4.2 Théorèmes donnant l'existence d'une limite

Nous admettons la *propriété fondamentale* suivante :

Les segments emboîtés : *Soit une suite de segments emboités*

$$\cdots \subset [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \subset \cdots \subset [a_1, b_1] \subset [a_0, b_0],$$

tous non vide, telle que $(b_n - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers zéro. Alors il existe un seul nombre réel commun à tous les intervalles* $[a_n, b_n]$, *pour* $n \in \mathbb{N}$.

Théorème 4.2.1 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite croissante. Alors*
(i) ou bien $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est majorée et alors* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge.*
(ii) ou bien $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *n'est pas majorée et alors* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers* $+\infty$.

Preuve : (**méthode de dichotomie**) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante.

(i) On suppose en plus que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée. Donc il existe un réel M tel que $u_n \leq M$ pour tout entier naturel n.
Si la suite est stationnaire (tous les termes égaux à partir d'un certain rang) elle converge. Supposons maintenant que ça n'est pas le cas.
Posons $I_0 = [u_0, M]$. Tous les termes de la suite sont dans I_0.
L'un seulement des deux intervalles $[u_0, \frac{u_0+M}{2}]$ et $[\frac{u_0+M}{2}, M]$ contient tous les termes de la suite sauf un nombre fini; on note I_1 cet intervalle. En effet :
- Si $[\frac{u_0+M}{2}, M]$ ne contient aucun terme de la suite, $[u_0, \frac{u_0+M}{2}]$ contient tous les termes de la suite.
- Si $[\frac{u_0+M}{2}, M]$ contient u_{n_0}, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante, pour tout $n \geq n_0$, $u_n \in [\frac{u_0+M}{2}, M]$, et donc $[\frac{u_0+M}{2}, M]$ contient tous les termes de la suite sauf un nombre fini. Et par contre, la suite n'étant pas stationnaire, $[u_0, \frac{u_0+M}{2}]$ ne contient qu'un nombre fini de termes de la suite.
En réitérant le procédé on construit une suite d'intervalles emboîtés $I_n = [a_n, b_n]$ de longueur $\frac{M-u_0}{2^n}$ telle que chacun contienne tous les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sauf un nombre fini. Puisque $\frac{M-u_0}{2^n}$ tend vers 0, il existe un unique nombre l appartenant à tous les I_n. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers l.
(ii) On suppose en plus que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée. Donc pour tout réel $M > 0$, on peut trouver un élément u_{n_0} de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $u_{n_0} > M$, comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante alors $u_n > M$, pour tout $n \geq n_0$. En conclusion $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

Théorème 4.2.2 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante. Alors*

(i) ou bien $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée et alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

(ii) ou bien $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas minorée et alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$.

Preuve : Il suffit de considérer la suite $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de remarquer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante alors $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée alors $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée et d'appliquer le théorème précédent.

Définition 4.2.3 *On appelle suites* adjacentes *deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les propriétés :*
(i) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
(ii) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
(iii) $b_n - a_n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Théorème 4.2.4 *Deux suites qui sont adjacentes convergent vers la même limite.*

Preuve : si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $b_n - a_n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, on obtient une suite de segments emboîtés

$$\cdots \subset [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \subset \cdots \subset [a_1, b_1] \subset [a_0, b_0]\,.$$

Alors il existe un seul nombre réel l commun à tous les intervalles $[a_n, b_n]$, pour $n \in \mathbb{N}$. On a donc pour tout n, $a_n \leq l \leq b_n$ puis $0 \leq b_n - l \leq b_n - a_n$ et $a_n - b_n \leq a_n - l \leq 0$. Puisque $b_n - a_n$ tend vers 0, par passage à la limite dans les inégalités on obtient que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et

$(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers l.

Exemple : Approximation de $\sqrt{2}$: On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies dans les exemples historiques avec $a = 2$ et $b_0 = 2$. On peut montrer par récurrence que pour tout n dans $\mathbb{N}$ on a

$$a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n$$

On en déduit que les deux suites convergent, que leur limite est commune et qu'elle vaut $\sqrt{2}$. On a alors pour tout n dans $\mathbb{N}$, $a_n < \sqrt{2} < b_n$.
On obtient les approximations suivantes de $\sqrt{2}$:
$a_0 = 1; a_1 = \dfrac{4}{3} = 1,3333333333\ldots; a_2 = \dfrac{24}{17} = 1,4117647058\ldots$
$b_0 = 2; b_1 = \dfrac{3}{2} = 1,5000000000\ldots; b_2 = \dfrac{17}{12} = 1,4166666666\ldots;$
$a_3 = \dfrac{816}{577} = 1,4142114384\ldots; a_4 = \dfrac{941664}{665857} = 1,4142135623\ldots$
$b_3 = \dfrac{577}{408} = 1,4142156862\ldots; b_4 = \dfrac{665857}{470832} = 1,4142135623\ldots$

Avec cette méthode nous pouvons donc obtenir autant de décimales que l'on veut du nombre $\sqrt{2}$. Remarquez que la convergence du procédé est très rapide.

4.3 Borne supérieure

Définition 4.3.1 *(i) Un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ est dit* majoré *s'il existe un nombre M plus grand que tous les éléments de A.*
(ii) Un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ est dit minoré *s'il existe un nombre m plus petit que tous les éléments de A.*

On a la *propriété fondamentale* suivante :

Existence de la borne supérieure

(i) Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ non vide et majoré. A admet une borne supérieure*, c'est-à-dire un nombre, noté* $\sup A$*, unique, vérifiant la propriété suivante : quel que soit le nombre $B < \sup A$, il existe un élément x de A tel que $B < x$.*
(ii) Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ non vide et minoré. A admet une borne inférieure*, c'est-à-dire un nombre, noté* $\inf A$*, unique, vérifiant la propriété suivante : quel que soit le nombre $B > \inf A$, il existe un élément x de A tel que $B > x$.*

Remarque : Cette propriété est équivalente à celle des segments emboités.

Exemples : $\sup[0,1] = 1$, $\sup[0,1[= 1$, $\inf\{1/n, n \in \mathbb{N}^*\} = 0$. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante majorée alors $\sup\{u_n, n \in \mathbb{N}\} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Remarque : $\sup A$ et $\inf A$ peuvent appartenir ou ne pas appartenir à A.

5 Que dire des suites qui n'ont pas de limite? (Complément)

5.1 Exemples numériques

Nous avons représenté graphiquement les 50 premiers termes de la suite de terme général $(-1)^n + \frac{1}{n}$ (voir Figure 3.1), les 30 premiers termes de la suite de terme général $(-1)^n\sqrt{n}$ (voir Figure 3.2), les 100 premiers termes de la suite de terme général $\sin n$ (voir Figure 3.3) et les 50 premiers termes de la suite définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + 2,83\, u_n(1-u_n)$ et $u_0 = 0,3$ (voir Figure 3.4). Que constatez-vous, à part que ces suites sont divergentes?

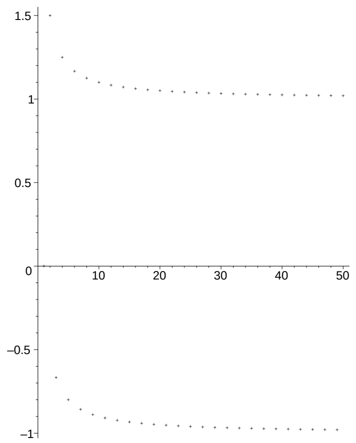

FIG. 3.1 –

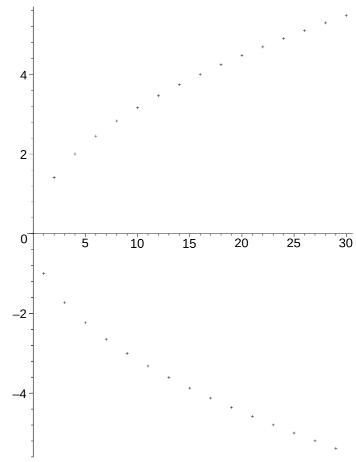

FIG. 3.2 –

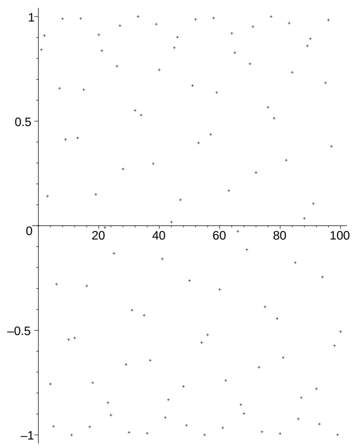

FIG. 3.3 –

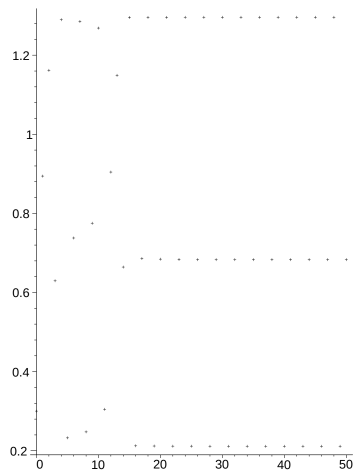

FIG. 3.4 –

5.2 Point d'accumulation

Définition 5.2.1 *Un nombre réel a est dit* point d'accumulation *d'une suite réelle si tout intervalle ouvert contenant a contient un nombre infini de termes de la suite.*

Remarque : "Un nombre infini" ne signifie pas "tous les termes sauf un nombre fini". Là est la différence entre la définition de la limite finie et du point d'accumulation d'une suite. Une suite peut avoir plusieurs points d'accumulation.

Exemples : Nous constatons graphiquement que :
- La suite $((-1)^n + \frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet -1 et 1 comme points d'accumulation.
- La suite $((-1)^n\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de point d'accumulation.
- La suite $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet tous les points de l'intervalle $[-1,1]$ pour points d'accumulation.
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet trois points d'accumulation.

Pour les deux premiers exemples, il n'est pas difficile de prouver ce que l'on constate graphiquement en considérant la suite des termes d'indices pairs et celle des termes d'indices impairs. Pour les deux exemples suivants c'est plus difficile.

La proposition suivante découle directement des définitions de limite et de point d'accumulation d'une suite :

Proposition 5.2.2 *Toute suite convergente admet sa limite comme unique point d'accumulation.*

Preuve : une suite qui converge vers l admet évidemment l comme point d'accumulation. Supposons qu'elle admette un autre point d'accumulation $l' \neq l$. On peut supposer que $l' > l$ sans perte de généralité. L'intervalle $]l-1, \frac{l+l'}{2}[$ contient tous les termes de la suite sauf un nombre fini, donc l'intervalle $]\frac{l+l'}{2}, l'+1[$ ne contient qu'un nombre fini de termes de la suite. Ce qui contredit le fait que l' soit un point d'accumulation de la suite.

Pour aller plus loin : Considérons une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée par m et M. L'un au moins des deux intervalles $[m, \frac{m+M}{2}]$ et $[\frac{m+M}{2}, M]$ contient une infinité de termes de la suite. Si l'on recommence l'opération, on peut construire une suite d'intervalles d'emboités contenant tous une infinité de termes de la suite. L'unique point appartenant à tous ces intervalles est alors un point d'accumulation de la suite. On obtient donc le théorème suivant :

Théorème 5.2.3 *Toute suite bornée admet au moins un point d'accumulation.*

6 Exercices

6.1 A propos des intervalles

1. Milieu : déterminer le milieu des intervalles bornés, c'est-à-dire le nombre situé à égale distance des extrémités de l'intervalle.
2. Intervalles et inégalités : caractériser l'intervalle $]a,b[$ par une inégalité de la forme $|x-l| < \varepsilon$ où l et ε sont à déterminer en fonction de a et b.
3. Subdivision : soient $x_0, x_1, \ldots, x_n$ des nombres vérifiant $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ et tels que les intervalles $[x_{i-1}, x_i]$ pour $i = 1, \ldots, n$ soient de longueur égale. Déterminer la longueur de ces intervalles puis l'expression de x_i en fonction de a, b, n et i.

4. Paramétrage : on peut paramétrer un intervalle borné de la façon suivante : tout nombre de l'intervalle $[a, b]$ s'écrit sous la forme $a + t(b - a)$ avec t appartenant à $[0, 1]$. Essayer de démontrer cette propriété. (On peut paramétrer de même les trois autres types d'intervalles bornés).

6.2 Quizz Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux ? Justifier à chaque fois la réponse donnée.

1. Une suite bornée est convergente.
2. Une suite positive et non majorée tend vers $+\infty$.
3. Si une suite a une limite strictement positive, tous ses termes sauf un nombre fini sont strictement positifs.
4. Une suite d'entiers convergente est stationnaire à partir d'un certain rang.
5. Une suite positive tendant vers zéro est décroissante à partir d'un certain rang.

6.3 Développement décimal

1. Déterminer toutes les décimales du nombre $\frac{58}{41}$.
2. Soit le nombre réel positif x dont le développement décimal est $x = M, d_1 d_2 d_3 \ldots$ Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} M + \frac{d_1}{10} + \cdots + \frac{d_n}{10^n} = x$.
3. Calculer le nombre dont le développement décimal est $0,9999\ldots$
   Ce nombre admet un autre développement décimal. Lequel? Identifier les nombres qui ont deux développements décimaux différents.

4. On considère le nombre réel y dont le développement décimal périodique est $0,123123\ldots$
   Montrer que y est un nombre rationnel que l'on calculera.
   Même question avec le nombre réel z dont le développement décimal périodique est $3,9545454\ldots$
5. Enoncer une propriété concernant les nombres réels dont le développement décimal est périodique.
6. En conséquence, qu'en est-il du développement décimal de $\sqrt{2}$, π ou e?

6.4 Dire si les suites suivantes sont convergentes, sont divergentes, admettent une limite :

$$u_n = \frac{\sin n}{n} \ , \ v_n = \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n \ , \ w_n = n + (-1)^n \sqrt{n}$$

$$x_n = \frac{3^n}{n!} \ , \ y_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n} \ (a, b \in \mathbb{R}^{*+}) \ , \ z_n = n^2 + n \cos n \ , \ a_n = (-1)^n \frac{n^2}{n^2+1} \ .$$

6.5 Les suites de terme général $u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ et $v_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+n}}$ sont-elles convergentes?

6.6 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\ .$$

- Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une limite.
- Montrer que $u_{2n} - u_n$ est minorée par un nombre strictement positif.
- En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge et déterminer sa limite.

6.7 Montrer que la suite de terme général $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}$ est bornée. Est-elle convergente?

6.8 Approximation de π :
Soit a_n le demi-périmètre du polygone à 3×2^n côtés, circonscrit au cercle de rayon 1 et b_n le demi-périmètre du polygone à 3×2^n côtés, inscrit dans le cercle de rayon 1. On a $a_1 = 2\sqrt{3}$, $b_1 = 3$ (cas de l'hexagone) et par des considérations géométriques on a les relations suivantes

$$\begin{cases} \frac{2}{a_{n+1}} &= \frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n} \\ b_n a_{n+1} &= b_{n+1}^2 \end{cases}$$

connues sous le nom de formules d'Archimède. Les approximations successives de π s'obtiennent en doublant à chaque fois le nombre de côtés des polygones. Nous allons montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent effectivement vers la même limite (qui est π).
Montrer par récurrence sur n que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ on a $a_n > a_{n+1} > b_{n+1} > b_n$. En déduire que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent, puis qu'elles ont même limite.

6.9 On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$0 < u_0 < v_0 \quad , \quad v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n) \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}\ .$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n < v_n$. En déduire que les suites sont convergentes vers la même limite. En étudiant la suite $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, déterminer cette limite.

6.10 On considère la suite de terme général

$$u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}\ .$$

Montrer que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers un nombre l. Déterminer des nombres rationnels a et b tels que $a < l < b$ et $b - a \leq 0,2$.

6.11 Montrer que les suites de terme général

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{nn!}$$

convergent vers une limite commune. Cette limite est e. Montrer que e est irrationnel.