Chapitre 4

Limites et continuité des fonctions numériques

1 Généralités sur les fonctions numériques

1.1 Quelques définitions

1.1.1 fonction numérique

Une fonction numérique $f : X \to Y$ est une fonction dont l'ensemble de départ X et l'ensemble d'arrivée Y sont des parties de $\mathbb{R}$ ([1]). on dit aussi que f est une fonction **à une variable réelle** — à **valeurs réelles** ([2])

• Les fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}$, les fonctions de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}^*$ définies par $f(x) = 1/x$, $g(x) = 1/x^2$... et plus généralement les fonctions d'expression une fraction rationnelle polynomiale, $F(x) = P(x)/Q(x)$ c'est à dire le quotient de deux fonctions polynomiales sont des fonctions numériques.

• Les fonctions trigonométriques : sin, cos, tan ... les fontions exp, ln .... sont des fonctions numériques.

• La fonction $E(x)$ (partie entière de x) est encore un autre type de fonction numérique.

• Une autre façon de se donner une fonction numérique est de la définir « par morceaux » , c'est à dire de définir $f(x)$ de plusieurs façons, suivant les valeurs de x. Par exemple (tracer leur graphe) :

$$\delta_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \neq 0 \end{cases} \quad , \quad f(x) = \begin{cases} 2-x & \text{si } x < 2 \\ x-4 & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \quad , \quad h(x) = \begin{cases} 2-x & \text{si } x < 1 \\ (x-2)^2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

[1]Puisque $\mathbb{N}$ est une partie de $\mathbb{R}$, on peut considérer les suites réelles comme des fonctions numériques. Elles ont été étudiées au chapitre 3. Ici, nous nous occuperons plutôt des fonctions définies sur une partie X de $\mathbb{R}$ constituée d'une réunion d'intervalles, ouverts ou fermés, mais non réduits à un point.

[2]de la même manière, on parle de fonction à variable entière, à variable complexe, ou à plusieurs variables ... et à valeurs entières, complexes, vectorielles, etc.

1.1.2 Domaine de définition

On se donne souvent une *relation fonctionnelle* du type $y = f(x)$ exprimant un réel y au moyen d'un réel x. On se demande alors souvent quelle est la partie X de $\mathbb{R}$, la plus grande possible, sur laquelle cette expression est définie[3]. La formule en question définit alors une fonction de X dans $\mathbb{R}$. On dit que ce X est le **domaine de définition** de l'expression $y = f(x)$.

Exercice Trouver le domaine de définition des expressions suivantes :

$$y = \sqrt{x-1}, \quad y = \sqrt{-x}, \quad y = \sqrt{x^2}, \quad y = (\sqrt{x})^2, \quad y = \ln(\sin x), \quad y = \frac{1}{\sin x}.$$

Remarquez que la troisième et la quatrième expression ne définissent pas la même fonction.

1.1.3 Graphe d'une fonction numérique

Soit f une fonction numérique, définie sur $X \subset \mathbb{R}$. On appelle **graphe** de f la partie G du plan $\mathbb{R}^2$ définie par

$$G = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in X \text{ et } y = f(x)\right\}.$$

On peut dire encore que G est l'ensemble des points du plan de coordonnées $(x, f(x))$, pour tous les $x \in X$.
Par définition de la notion de fonction, cet ensemble G a la propriété suivante : pour toute droite D parallèle à l'axe Oy passant par un point d'abscisse $x \in X$, D coupe G en exactement un point.
L'image $f(X)$ se représente sur l'axe Oy, en projetant G sur cet axe parallèlement à Ox. Ainsi la représentation schématique du graphe d'une fonction peut servir à connaître diverses propriétés de cette fonction.

Exercices

1. Dans un repère orthonormé, à quelles propriétés de symétrie du graphe de f correspondent les propriétés "f paire" et "f impaire" ?

2. Comment détermine-t-on graphiquement l'image par f d'une partie A de X ? Pour B une partie de $\mathbb{R}$, comment détermine-t-on graphiquement $\{x \in X \mid f(x) \in B\}$?
   Application : à l'aide du graphe de $f(x) = x^2$, déterminer $f(A)$, où $A = [-1, 4]$. Comparer avec l'intervalle $[f(-1), f(4)]$. Déterminer graphiquement $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in [1, 2]\}$.

1.1.4 Opérations sur les fonctions numériques

Etant donné deux fonctions numériques f_1 et f_2, définies sur une même partie de X de $\mathbb{R}$, la correspondance qui associe à $x \in X$ le nombre réel $f(x) + g(x)$ est une fonction numérique g, définie sur X. On dira que la fonction g est la somme de f_1 et f_2, et on écrira $g = f_1 + f_2$.

[3]C'est à dire que pour chaque $x \in X$, l'expression $y = f(x)$ définit un et un seul réel y.

De même on peut définir sur X la fonction $h = f_1 f_2$, produit de f_1 et f_2, par $h(x) = f_1(x)f_2(x)$, et sur $X' = \{x \in X | f_2(x) \neq 0\}$ la fonction f_1/f_2.

Dans tous ces cas, lorsque les fonctions concernées ne sont pas définies sur tout $\mathbb{R}$, il faut être attentif au domaine de définition de la fonction obtenue. On réfléchira par exemple aux cas suivants :

Exercice Soient $f(x) = \dfrac{x-2}{x-1}$ et $g(x) = \sqrt{x}$.
Quels sont les domaines de définition de $f+g$, fg, f/g, g/f ?

1.1.5 Composition de fonctions

Considérons trois sous ensembles X, Y et Z de $\mathbb{R}$, et deux fonctions numériques $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$. A chaque élément $x \in X$ on peut associer l'élément de Z défini par $z = g(f(x))$. On a ainsi obtenu une fonction de X dans Z, notée $g \circ f$; on l'appelle la **composée** de f et de g.

• Sous les hypothèses ci-dessus pour f et g, la fonction $g \circ f$ est toujours définie mais en général $f \circ g$ n'est pas bien définie c'est par exemple le cas des fonctions $f(x) = \sqrt{x}$: $\mathbb{R}^{*+} \to \mathbb{R}^{*+}$ et $g(x) = \ln x : \mathbb{R}^{*+} \to \mathbb{R}$

• Si $X = Z$, alors les deux composées $g \circ f$ et $f \circ g$ sont définies. Notons cependant qu'en général ces deux fonctions sont différentes. Par exemple Pour les deux fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par $f(x) = x^2$ et $g(x) = x + 2$, comparez $g \circ f$ et $f \circ g$.

1.2 Bijection et fonction réciproque

1.2.1 Bijections

Soit f une fonction numérique de X dans Y. On dit que f est **bijective** (ou que f est une **bijection**) si tout élément $y \in Y$ possède un unique antécédent par f.

En notation mathématique, f est bijective si on a

$$\forall\, y \in Y, \quad \text{Il existe un unique } x \in X, \quad \text{tel que } y = f(x)$$

Exercices

1. Formuler en écriture mathématique le fait que :

   a) b élément de Y n'est pas une image de $f : X \to Y$.
   b) Tous les éléments de Y sont des images par $f : X \to Y$.
   c) Tous couples (x, x') d'éléments distincts de X ont des images distinctes dans Y.

2. Si $f : X \longrightarrow Y$ est une bijection, montrer que deux éléments distincts de X ont alors des images distinctes dans Y.

3. Les fonctions suivantes sont-elles bijectives ?

   $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = x(x-2), \quad g : [1, +\infty[\longrightarrow [-1, +\infty[, x \mapsto f(x) = x(x-2).$

1.2.2 fonction réciproque d'une bijection

Si f est une bijection de X sur Y, à chaque $y \in Y$ correspond donc un unique élément $x \in X$ tel que $y = f(x)$. Cela définit une fonction de Y dans X, appelée **fonction réciproque** de f. On la note f^{-1} et

$$(\forall\, x \in X)\,(\forall\, y \in Y) \quad x = f^{-1}(y) \Longleftrightarrow y = f(x).$$

Exercice Montrer que f^{-1} est une bijection de Y sur X et $(f^{-1})^{-1} = f$.

Exemple Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x + 3$. Pour chaque $y \in \mathbb{R}$ il existe un unique x tel que $y = f(x)$: en effet on calcule facilement que $y = 2x + 3$ si et seulement si $x = \dfrac{y-3}{2}$. Donc f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur lui-même ; sa fonction réciproque est aussi une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, qui peut s'écrire $f^{-1}(y) = \dfrac{y-3}{2}$, ou encore $f^{-1}(x) = \dfrac{x-3}{2}$, ce qui revient au même.

1.2.3 Graphes d'une bijection et de sa réciproque

Considérons une fonction numérique bijective $f : X \longrightarrow Y$ et sa fonction réciproque $f^{-1} : Y \to X$.

Soient $a \in X$ et $b = f(a)$. Le point (a, b) appartient au graphe G de f. Mais on a aussi $a = f^{-1}(b)$, donc le point (b, a) appartient au graphe H de f^{-1}. Réciproquement, si le point (c, d) appartient à H, le point (d, c) appartient à G.

Or dans un repère orthonormé, les points (a, b) et (b, a) sont symétriques par rapport à la droite Δ d'équation $y = x$ (appelée "première bissectrice"). On passe donc de G à H, et de H à G, au moyen de cette symétrie. *Dans un repère orthonormé, le graphe d'une fonction numérique bijective et celui de sa fonction réciproque sont symétriques par rapport à la première bissectrice.*

Exercices

1. Dans un repère orthonormé, quelle est l'équation de la droite D', symétrique par rapport à la première bissectrice Δ de la droite D d'équation $y = 5x - 7$?
2. Dans un repère orthonormé, tracer le graphe de g et de sa réciproque où $g : [1, +\infty[\longrightarrow [-1, +\infty[, x \mapsto g(x) = x(x-2)$.
3. Trouver des fonctions numériques bijectives telles que $f = f^{-1}$.

1.3 Sens de variation d'une fonction numérique

Soit f une fonction numérique définie sur $X \subset \mathbb{R}$, I une partie de X. On rappelle que l'on dit qu'une fonction numérique f est **croissante sur** I si étant donné deux réels $x, y \in I$, chaque fois que $x \leq y$ on a $f(x) \leq f(y)$.
Cela se formule avec:

$$\forall\, (x, y) \in I^2, \quad x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y),$$

qui peut encore se traduire de la façon suivante :

$$\forall (x,y) \in I^2 \text{ avec } x \neq y \text{ alors } \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \geq 0.$$

Si on a la condition stricte $\forall (x,y) \in I^2, \quad x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$, on dit que f est **strictement croissante** sur I.

De même f est **décroissante** sur I si on a

$$\forall (x,y) \in I^2, \quad x \leq y \Longrightarrow f(x) \geq f(y)$$

et **strictement décroissante** sur I si

$$\forall (x,y) \in I^2, \quad x < y \Longrightarrow f(x) > f(y).$$

On dit que f est **monotone** sur I si elle est croissante sur I, ou bien décroissante sur I, **strictement monotone** si elle est strictement croissante ou strictement décroissante. Enfin, les fonctions à la fois croissantes et décroissantes sont les fonctions constantes.

2 Limites de fonctions numériques

Les limites d'une fonction numérique f permettent de comprendre les comportements de *raccordement* de f aux points de l'ensemble sur lequel elle est définie $\mathcal{D}_f$ mais aussi le comportement de f aux *extrémités* de $\mathcal{D}_f$. Le problème du raccordement est résolu par l'étude de la *continuité* de f, celui du comportement aux *extrémités* par l'étude des limites de f aux bornes de $\mathcal{D}_f$.

On s'intéresse ici à la notion générale de limite d'une fonction soit en un point $a \in \mathcal{D}_f$ soit en une "extrémité" a ou ∞ du bord de $\mathcal{D}_f$. On commence par le cas de limite en $+\infty$ ou $-\infty$.

2.1 Limite d'une fonction numérique à l'infini

Dans cette partie, $\mathcal{D}$ est une partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle de la forme $]\alpha, +\infty[$, et f est une fonction numérique de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}$. *On dit alors que f est définie au voisinage de* $+\infty$.

Définition 2.1.1 – **limite finie à l'infini**– *On dit que $f(x)$ tend vers $l \in \mathbb{R}$ quand x tend vers $+\infty$ lorsque pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $A \in \mathbb{R}$ tel que $x > A \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$.*

Définition 2.1.2 – **limite infinie à l'infini**– *On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ (resp $-\infty$) quand x tend vers $+\infty$ lorsque pour tout $B \in \mathbb{R}^+$, on peut trouver $A \in \mathbb{R}$ tel que $x > A \Rightarrow f(x) > B$ (resp. $x > A \Rightarrow f(x) < -B$).*

Exercice. Illustrer ces définitions. Imaginer les définitions des limites de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$.

Proposition 2.1.3 – *Une fonction f admet au plus une limite (finie ou infinie) quand x tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).*

Lorsqu'une telle limite existe, on peut alors la noter $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ (resp $\lim_{x\to-\infty} f(x)$) car c'est une valeur bien définie.

Démonstration de (2.1.3) – Supposons d'abord que $f(x)$ tende vers l et $l' \in \mathbb{R}$ quand $x \to +\infty$, et que l'on ait $l \neq l'$. Posons $\varepsilon = \frac{1}{4}|l' - l|$. On peut donc trouver $A \in \mathbb{R}$ tel que $x > A \Rightarrow |f(x) - l| < \frac{1}{4}|l' - l|$, et $A' \in \mathbb{R}$ tel que $x > A' \Rightarrow |f(x) - l'| < \frac{1}{4}|l' - l|$. Alors pour $x > \max\{A, A'\}$, on a

$$|l' - l| = |l' - f(x) + f(x) - l| \leq |l' - f(x)| + |f(x) - l| < (\frac{1}{4} + \frac{1}{4})|l' - l|$$

ce qui est absurde. Les autres cas sont laissés en exercice.

Théorème 2.1.4 (critère par les suites)– *Une fonction f admet une limite (finie ou infinie) quand x tend vers $+\infty$ si et seulement si* **pour toute** *suite réelle (u_n), à valeurs dans $\mathcal{D}_f$ et tendant vers $+\infty$, $f(u_n)$ tend vers cette limite quand n tend vers l'infini.*

Nous admettrons ce résultat. Ce critère s'utilise le plus souvent, pour prouver l'absence de limite d'une fonction, pour déterminer des limites de suites, et aussi pour démontrer des résultats de cours.

Par exemple :

1. Montrer en utilisant les suites $u_n = 2n\pi$ et $v_n = 2n\pi + \pi/2$ que la fonction sinus n'a pas de limite en $+\infty$.
2. Montrer que la fonction $f(x) = x - \mathrm{E}(x)$ n'a pas de limite en $+\infty$.
3. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{a^{2n+1}}$ en fonction de $a \in \mathbb{R}$.

2.2 Limite d'une fonction numérique en un point

On intéresse ici au comportement "près" d'un réel a d'une fonction numérique f pour laquelle $\mathcal{D}_f$ contient un intervalle de la forme $[b, a[$ $(b < a)$, ou $]a, b]$ $(a < b)$ (ou les deux, bien sûr). Il est possible que a ne soit pas dans le domaine de définition de f mais seulement une de ces extrémités. Dans tous les cas, on dit *qu'on peut étudier f au voisinage de a.*

Définition 2.2.1 – limite finie en a– *Soit f une fonction numérique que l'on peut étudier au voisinage de a, et soit $l \in \mathbb{R}$. On dit que $f(x)$tend vers l quand x tend vers a lorsque pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in \mathcal{D}_f \setminus \{a\}$, on ait $|x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$.*

Définition 2.2.2 – limite infinie en a– *Soit f une fonction numérique que l'on peut étudier au voisinage de a. On dit que $f(x)$tend vers $+\infty$ quand x tend vers a lorsque pour tout $A \in \mathbb{R}$, on peut trouver $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in \mathcal{D}_f \setminus \{a\}$, on ait $|x - a| < \eta \Rightarrow f(x) > A$.*

Exercice. Illustrer ces définitions. Imaginer la définition de « $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers a » .

Proposition 2.2.3 – *Une fonction f admet au plus une limite (finie ou infinie) quand x tend vers a.*

La preuve est calquée sur celle de la proposition 2.1.3. Lorsqu'une telle limite existe, on peut alors la noter $\lim_{x \to a} f(x)$ car c'est une valeur bien définie.

Le critère par les suites 2.1.4 est encore valable (encore admis !) :

Théorème 2.2.4 – *Une fonction f qu'on peut étudier au voisinage de a admet une limite (finie ou infinie) quand x tend vers a si et seulement si pour toute suite réelle (u_n), à valeurs dans $\mathcal{D}_f$ et tendant vers a, $f(u_n)$ tend vers cette limite quand n tend vers l'infini.*

Exercice. Montrer que la fonction $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ n'a pas de limite quand $x \to 0$(on considèrera des suites prenant leurs valeurs dans $\{\frac{2}{k\pi}, k \in \mathbb{Z}^*\}$).

Parfois il est bienvenu d'étudier séparément le comportement d'une fonction à gauche et à droite d'un point $a \in \mathbb{R}$. On introduit donc les notions de limite à gauche et de limite à droite :

Définition 2.2.5 – **limite à gauche en** a – *Une fonction f admet une limite (finie ou infinie) à gauche de $a \in \mathbb{R}$ lorsque $\mathcal{D}_f$ contient un intervalle I_g de la forme $]b, a[$ $(b < a)$, et que la restriction de f à I_g admet cette même limite en a.*

On note alors cette limite $\lim_{x \to a^-} f(x)$.

Exercice. Définir de même la limite à droite.
Exercice. Pour $f(x) = \exp(1/x)$ déterminer $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ et $\lim_{x \to 0^+} f(x)$.

Remarques

1. Si f admet en a une limite à gauche et une limite à droite, alors si ces limites sont égales, c'est la limite de f en a; et si elles sont différentes, alors f n'admet pas de limite en a.

2. Si f n'admet pas de limite à gauche ou à droite en a, alors f n'admet pas de limite en a.

2.3 Règles de calcul

Des règles de calcul pour les suites, on tire les règles suivantes :

Proposition 2.3.1 – *On se place dans l'un des trois cas suivants :*

- *les fonctions f et g sont définies au voisinage de $+\infty$.*
- *les fonctions f et g sont définies au voisinage de $-\infty$.*
- *les fonctions f et g peuvent-être étudiées en $a \in \mathbb{R}$.*

On a alors (l et l' désignent des réels) :

(a) Si $f(x)$ tend vers l et $g(x)$ tend vers l' alors $(f+g)(x)$ tend vers $l+l'$.

(b) Si $f(x)$ tend vers l et $g(x)$ tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) alors $(f+g)(x)$ tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

(c) Si $f(x)$ tend vers $+\infty$ et $g(x)$ tend vers $+\infty$ alors $(f+g)(x)$ tend vers $+\infty$.

(d) Si $f(x)$ tend vers $-\infty$ et $g(x)$ tend vers $-\infty$ alors $(f+g)(x)$ tend vers $-\infty$.

(e) Si $f(x)$ tend vers l et $g(x)$ tend vers l' alors $(fg)(x)$ tend vers ll'.

(f) Si $f(x)$ tend vers $l>0$ ou tend vers $+\infty$ et $g(x)$ tend vers $+\infty$ alors $(fg)(x)$ tend vers $+\infty$.

(g) Si $f(x)$ tend vers $l\neq 0$ alors $\dfrac{1}{f(x)}$ tend vers $\dfrac{1}{l}$.

(h) Si $f(x)$ tend vers $\pm\infty$ alors $\dfrac{1}{f(x)}$ tend vers 0.

(i) Si $f(x)$ tend vers 0 par valeurs strictement supérieures (resp. inférieures) alors $\dfrac{1}{f(x)}$ tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Donnons à titre d'exemple la Preuve de (i) quand x tend vers a: Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite à valeurs dans $\mathcal{D}_f\cap\mathcal{D}_g$ et qui tend vers a. Alors la suite $(f(u_n))$ converge vers l et la suite $(g(u_n))$ converge vers l', donc la suite $((f+g)(u_n))$ converge vers $l+l'$. Le théorème 2.2.4 permet de conclure...

Exercice. Soit $a\in\mathbb{R}$, soit f, g, h et φ quatre fonctions définies sur $\mathbb{R}$ vérifiant : $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=+\infty$, h et φ n'ont pas de limite en a. Que peut-on dire des éventuelles limites en a de $f+h$, $g+h$ et $h+\varphi$?

Proposition 2.3.2 passage à la limite dans les inégalités *Les fonctions f, g et h sont à valeurs réelles, et ont même domaine de définition pour simplifier l'énoncé. On considère successivement les cas où x tend vers $\pm\infty$ ou $a\in\mathbb{R}$.*

(i) Si $\forall x$, $f(x)\leq g(x)$ et $\lim f(x)=+\infty$ alors $\lim g(x)=+\infty$.

(ii) Si $\forall x$, $f(x)\leq g(x)$ et $\lim g(x)=-\infty$ alors $\lim f(x)=-\infty$.

(iii) Si $\forall x$, $f(x)\leq g(x)$ et $\lim f(x)=l$, $\lim g(x)=l'$ alors $l\leq l'$.

(iv) Si $\forall x$, $f(x)\leq h(x)\leq g(x)$ et $\lim f(x)=\lim g(x)=l$ alors $\lim h(x)=l$.

Ceci se prouve aisément par le critère des suites. Le (iv), appelé parfois lemme des gendarmes a pour variante l'énoncé important suivant :

Lemme 2.3.3 *Soit f et g définies sur le même ensemble. On suppose que pour tout x, $0 \leq |f(x) - l| \leq g(x)$,et $\lim g(x) = 0$. Alors $\lim f(x) = l$.*

Ce résultat s'utilise souvent de la façon suivante. La limite l et la fonction g ne sont pas en générales connues... On commence alors par évaluer la limite l cherchée pour la fonction f, ensuite on essaye de majorer $|f(x)-l|$ par une fonction de limite nulle au point considéré.

Exercice : Calculer (en utilisant le lemme...) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2+3x-1}{x^2+3}$.

Exercice. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} x\sin(1/x)$. *Plus généralement, si f est un fonction* **bornée au voisinage de** *a et g est une fonction qui tend vers zéro pour x tendant vers a (fini ou infini), montrer que $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = 0$.*

Enfin, un résultat qui n'a pas d'analogue pour les suites :

Théorème 2.3.4 composition des limites– *Soit a, b et c, trois réels, soit I un intervalle tel que $a \in I$, et soit f et g, deux fonctions réelles telles que $\mathcal{D}_{g\circ f}$ contienne $I \setminus \{a\}$. On suppose qu'on a : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{x\to b} g(x) = c$. Alors on a $\lim\limits_{x\to a} g\circ f(x) = c$.*

Preuve : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite à valeurs dans $\mathcal{D}_{g\circ f}$ et qui tend vers a. Alors $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et est à valeurs dans $\mathcal{D}_g$ (pourquoi ?), et tend vers b. Donc $(g\circ f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers c.

On imagine les nombreuses variantes lorsqu'on remplace des valeurs finies par des valeurs infinies pour a, b, ou c. Elles sont toutes vraies dès qu'on peut étudier $g\circ f$ au voisinage de $a \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$.

Exemple : Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin\dfrac{1}{x}$.

3 Continuité

3.1 Continuité en un point

Définition 3.1.1 – *Soit f une fonction numérique définie en a et que l'on peut étudier au voisinage de a. On dit que f est continue en a lorsqu' on a $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$,*

Exercice Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(0) = 1$ et $f(x) = 1 + x\cos(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$, est continue en zéro.

Exercice Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(0) = 0$ et $f(x) = \exp(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$, n'est pas continue en zéro.

D'après le théorème (2.2.4) et la définition précédente on a le résultat important suivant :

Théorème 3.1.2 – *Soit f une fonction numérique définie en a et que l'on peut étudier au voisinage de a. La fonction f est continue en a si et seulement si pour toute suite (u_n) à valeurs dans $\mathcal{D}$ et de limite a, la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(a)$.*

Il est peut-être alors plus facile de comprendre ce qu'est la non-continuité ou discontinuité en a : il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers a et à valeurs dans $\mathcal{D}_f$ ne convergeant pas vers $f(a)$.

Exercice Montrer que la fonction « indicatrice de $\mathbb{Q}$ » définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = 0$ sinon, n'est pas continue en zéro (pour $u_n = \frac{1}{n\sqrt{2}}$, que vaut $f(u_n)$?).

Exercice. Calculer $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

Rappelons quelques propriétés bien connues :

Proposition 3.1.3 *(i) La somme et le produit de deux fonctions continues en a sont des fonctions continues en a.*
(ii) Si f est continue en a et si $f(a) \neq 0$, alors $\dfrac{1}{f}$ est continue en a.
(iii) Si f est continue en a et si g est continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a.

La preuve de (i) et (ii) découle directement du théorème (3.1.2) et des résultats sur les suites. Montrons (iii) à l'aide de ce même théorème : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite tendant vers a. Alors la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $f(a)$, et la suite $(g(f(u_n)))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $g(f(a))$. $\square$

3.2 Continuité d'une fonction sur un intervalle

Définition 3.2.1 – *Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I. On dit que f est continue sur I lorsqu'elle est continue en tout $x \in I$.*

On peut généraliser cette définition à une réunion d'intervalles par exemple :

• Les fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}$, les fonctions de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}^*$ définies par $f(x) = 1/x$, $g(x) = 1/x^2$... et plus généralement les fonctions d'expression une fraction rationnelle, $F(x) = P(x)/Q(x)$ c'est à dire le quotient de deux fonctions polynomiales sont des fonctions numériques continues sur leur ensemble de définition.

• Les fonctions trigonométriques : sin, cos, tan ... les fontions exp, ln .... sont des fonctions numériques continues sur leur ensemble de définition.

Nous avons immédiatement les propriétés suivantes :

Proposition 3.2.2 – *Soit I, un intervalle. Alors :*
(i) La somme et le produit de deux fonctions continues sur I sont des fonctions continues sur I.
(ii) Si f est continue sur I et ne s'annule pas, alors $\dfrac{1}{f}$ est continue sur I.
(iii) Si f est continue sur I, si g est continue sur J, et si $f(I) \subset J$, alors $g \circ f$ est continue sur I.

Exercice. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 + 1$ si $x < 0$ et $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ si $x \geq 0$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Proposition 3.2.3 prolongement par continuité– *Soit f définie sur un intervalle I privé d'un point a, et continue sur $I \setminus \{a\}$. Si on a $\lim_{x\to a} f(x) = l \in \mathbb{R}$ alors f admet un unique prolongement continu à I en posant $f(x) = l$.*

Preuve : C'est évident.

Exercice Expliciter le prolongement par continuité sur $\mathbb{R}$ de la fonction definie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.

3.3 Théorèmes fondamentaux sur les fonctions continues

T.P. En traçant le graphe de la fonction sinus sur $[0, \pi/2]$, on voit que celle-ci vaut $1/4$ en un point. Au moyen d'une calculatrice, on va chercher une valeur approchée d'un réel $x_0 \in [0, \pi/2]$, tel que $\sin x_0 = 1/4$. Plutôt que de chercher au hasard, on adopte la méthode suivante : On calcule que $\sin(\pi/4) > 1/4$, on recherche alors x_0 dans $[0, \pi/4]$; on compare $\sin(\pi/8)$ et $1/4$, si $\sin(\pi/8) = 1/4$, on a fini, si $\sin(\pi/8) < 1/4$, on recherche x_0 dans $[\pi/8, \pi/4]$, et si $\sin(\pi/8) > 1/4$, on recherche x_0 dans $[0, \pi/8]$, et ainsi de suite (dichotomie sur l'ensemble de départ).

1. A la k^{e} étape, avec quelle précision connaît-on x_0 ?
2. Vérifier que les valeurs calculées sont assez vite proches de $1/4$.
3. "Passage à la limite". Supposons que le procédé n'a pas de fin. On construit par la pensée (c'est à dire par récurrence) une suite d'intervalles emboîtés $[a_n, b_n]$ avec $\sin a_n < 1/4 < \sin b_n$ et $b_n - a_n = (1/2^n)(\pi/2)$. Montrer que le réel commun à tous les $[a_n, b_n]$ est une solution de notre problème.

On a montré dans un cas particulier mais sans perdre de généralité le résultat suivant :

Théorème 3.3.1 des valeurs intermédiaires– *Soit f, une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ ($a < b$) telle que $f(a) \neq f(b)$. Tout réel compris strictement entre $f(a)$ et $f(b)$ admet au moins un antécédent dans $]a, b[$.*

Remarque : Contrairement à l'exemple étudié, c n'est pas forcément unique. La méthode donne en pratique la valeur apprché d'une seule des solutions.

Corollaire 3.3.2 *–L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.*

Preuve : Soit f, une fonction continue sur un intervalle I, montrons que $f(I)$ est un intervalle. Rappelons qu'un intervalle est une partie J de $\mathbb{R}$ qui vérifie que si α et β sont des éléments (distincts) de J, alors tout réel compris entre α et β appartient à J. Soit α et β, éléments de $f(I)$, soit γ entre α et β, alors il existe a, $b \in I$ tels que $f(a) = \alpha$ et $f(b) = \beta$. D'après 3.3.1, il existe c entre a et b, donc dans I, tel que $f(c) = \gamma$, on a donc $\gamma \in f(I)$.$\square$

Exercice. Donner un exemple où :

- l'image d'un intervalle ouvert par une fonction continue est un intervalle fermé,
- l'image d'un intervalle fermé par une fonction continue est un intervalle ouvert,

- l'image d'un intervalle borné par une fonction continue est un intervalle non borné,
- l'image d'un intervalle non borné par une fonction continue est un intervalle borné.

Corollaire 3.3.3 *–Si f est continue et strictement croissante (resp. décroissante) sur $[a, b]$, alors c'est une bijection de $[a, b]$ sur $[f(a), f(b)]$ (resp. $[f(b), f(a)]$) et f^{-1} est strictement croissante (resp. décroissante) et continue.*

Preuve dans le cas croissant : Clairement f est bijective de $[a, b]$ sur $[f(a), f(b)]$, et f^{-1} existe de $[f(a), f(b)]$ sur $[a, b]$ et est strictement croissante. Il suffit donc de montrer que : *toute bijection croissante g d'un intervalle $[c, d]$ sur un intervalle $[r, s]$ est continue*, ce qui est un résultat intéressant en soi. Montrons que g est continue à droite en tout point de $[c, d[$. Soit $x \in [c, d[$, soit $\varepsilon > 0$, posons $m = \min\{g(x) + \varepsilon, s\}$. On a "clairement" $g^{-1}([g(x), m]) = [x, g^{-1}(m)]$, et il existe $\eta > 0$ tel que $x + \eta < g^{-1}(m)$. Alors on a $g([x, x + \eta]) \subset [g(x), g(x) + \varepsilon] \subset [g(x) - \varepsilon, g(x) + \varepsilon]$.
On montre de même que g est continue à gauche en tout point de $]c, d]$, donc g est continue. □

Enfin, le résultat le plus important pour ce qui suivra :

Théorème 3.3.4 *– Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue sur $[a, b]$, alors il existe $c \leq d \in \mathbb{R}$ tels que $f([a, b]) = [c, d]$.*

Preuve : Montrons que $f([a, b])$, noté I_0, admet un plus grand élément d. Une fois de plus on recourt à la dichotomie (cette fois sur l'ensemble de départ). On compare les ensembles $E_0 = f([a, \frac{a+b}{2}])$ et $F_0 = f([\frac{a+b}{2}, b])$ de la manière suivante : Etant données deux parties A et B de $\mathbb{R}$, on dira que A domine B quand tout $\{y\} \subset B$ est majoré par un $x \in A$. On a forcément A qui domine B ou B qui domine A ou les deux (exercice), on remarque aussi que c'est une relation transitive (mais pas une relation d'ordre). De plus si A domine B, alors A domine $A \cup B$.
Si E_0 domine F_0, alors on pose $I_1 = [a, \frac{a+b}{2}]$, sinon, on pose $I_1 = [\frac{a+b}{2}, b]$ et on remarque que $f(I_1)$ domine $f(I_0) = E_0 \cup F_0$. Par récurrence, on construit une suite d'intervalles emboîtés I_n dont la largeur tend vers 0 : Soit $I_n = [a_n, b_n]$, $E_n = f([a_n, \frac{a_n+b_n}{2}])$ et $F_n = f([\frac{a_n+b_n}{2}, b_n])$ etc. Soit δ, l'intersection de tous les I_n, alors $f(\delta)$ est le maximum de f. En effet, soit $x \in [a, b]$ alors pour tout n il existe $\delta_n \in I_n$ tel que $f(\delta_n) \geq f(x)$ car $f(I_n)$ domine $f(I_0)$ (par transitivité), mais on a $f(\delta) = \lim f(\delta_n)$ car $\delta_n \to \delta$ et parce que f est continue.
De même on montre que $f([a, b])$ admet un plus petit élément c, et on conclut par 3.3.2. □

Remarques :

- En général, on a $c \neq f(a)$ et $d \neq f(b)$ (trouver des exemples).
- Les valeur c et d peuvent être atteintes un nombre infini de fois, par exemple si f est constante.
- La méthode ci-dessus ne permet pas concrètement de déterminer c et d en l'absence d'hypothèses supplémentaires.
- Montrer par un exemple que l'hypothèse de la continuité de f est nécessaire, toutes choses étant égales par ailleurs.

4 Exercices

4.1 Donner le domaine de définition des expressions suivantes :

$$f(x) = \sqrt{x+1}, \quad g(x) = \ln(1-2x^2), \quad h(x) = \frac{x+1}{x^3-2x}.$$

4.2 Les fonctions suivantes sont-elles bijectives :

- f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définie par $f(n) = 2n+1$,
- g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = \sqrt[3]{x} - 1$,
- h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $h(x) = \sqrt{x^2}$.

Déterminer l'image de chacune de ces fonctions.

4.3 Soit f définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. Donner son image I. Montrer qu'elle possède une fonction réciproque $g = f^{-1}$ définie sur I, et expliciter $g(x)$.

4.4 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x$ si $|x| \geq 1$, $f(x) = -x$ si $|x| < 1$. Dessiner le graphe de f. Montrer que f est bijective, et décrire la fonction f^{-1}. Calculer $f \circ f$.

4.5 Soit f la restriction de la fonction cos à $[0, 2\pi]$. Tracer le graphe de f, et utilisez-le pour répondre aux questions suivantes :

- Quelle est l'image par f des intervalles suivants :

$$]0,\pi[, \quad]0,2\pi[, \quad [0,\pi/3], \quad]\pi/3, 4\pi/3].$$

- Déterminer les ensembles suivants :

$$A = \{x \in [0,2\pi] \mid f(x) \geq 1\},$$

$$B = \{x \in [0,2\pi] \mid f(x) > 0\},$$

$$C = \{x \in [0,2\pi] \mid f(x) = 1/2\},$$

$$D = \{x \in [0,2\pi] \mid f(x) \geq 1/2\}.$$

4.6 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$. Montrer qu'il existe un réel A tel que f soit positive sur l'intervalle $[A, +\infty[$.

4.7 Montrer (par l'absurde avec deux suites....) qu'une fonction périodique définie sur $\mathbb{R}$ admettant une limite finie en $+\infty$ est constante.

4.8 Etudier la limite quand x tend vers 0 de $\sin x \sin(\dfrac{1}{x})$.

4.9 Etudier $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin x)}{x^2}$, $\lim_{x\to+\infty} x\sin(\frac{1}{x})$ et $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1-\cos x}$,

4.10 Etudier la limite quand x tend vers $+\infty$ de $x\sqrt{x}+\cos x$, de $\frac{1}{x}-2\sin x$.

4.11 Déterminer les limites éventuelles suivantes:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{|x|-1} \qquad \lim_{x\to 1} \frac{x^3+1}{x^2-1} \qquad \lim_{x\to -1} \frac{x^3+1}{x^2-1} \qquad \lim_{x\to 1} \frac{x^n-1}{x^p-1}\ n,p\in\mathbb{N}^*$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x+1-\sqrt{x^2+2}}{x-3} \qquad \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x+2}-x-m \quad m\in\mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\ln x}{2x+\sin x} \qquad \lim_{x\to 0} x\sin(1/x) \qquad \lim_{x\to+\infty} (\frac{x-1}{2x+1})^{x^2} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\ln(1+x)}$$

4.12

1. Par deux études de fonctions, montrer qu'on a

$$\textit{pour tout } x\in]0,\pi[\ \ 1-\frac{x^2}{2}<\cos x.$$

   puis montrer qu'on a

$$\textit{pour tout } x\in]0,\pi[\ \ x-\frac{x^3}{6}<\sin x.$$

2. En déduire la valeur de $\lim_{x\to 0^+} (1/\sin x - 1/x)$.

4.13 Etudier la continuité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x}e^{\frac{-1}{x^2}} & si\ x\neq 0 \\ 0 & si\ x=0 \end{cases}$$

4.14 Peut-on prolonger par continuité en 0 la fonction h définie sur $\mathbb{R}^*$ par:

$$h(x)=\frac{\sin(1/x)}{\exp(1/x)+1}$$

4.15 Soit f une fonction continue sur $[0,+\infty[$ telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x)=l$ ($l\in\mathbb{R}$). Montrer que f est bornée sur $[0,+\infty[$.

4.16 Soit f une fonction numérique continue sur un intervalle $I=]a,b[$ de $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe x_0 appartenant à I tel que $f(x_0)>0$. Montrer qu'alors il existe un intervalle $J\subset I$ tel que f soit strictement

4.17 P est un polynôme impair non nul.

1. Montrer que l'équation $e^{P(x)} + P(x) = 0$ admet au moins une solution réelle.
2. Lorsque $P(x) = x$, montrer que la solution est unique et en donner une valeur approchée à $0,1$ près.

4.18 Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une application continue. Montrer que f admet au moins un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe α dans $[0,1]$ tel que $f(\alpha) = \alpha$ (On pourra considérer la fonction $h(x) = f(x) - x$) .
Montrer que l'hypothèse de continuité est nécessaire.
Si l'on remplace $[0,1]$ par $[0,1[$ le résultat est-il encore vrai?

4.19 Montrer que la fonction définie par $h(x) = \dfrac{\ln(1+\sin x)}{\cos x}$, réalise une bijection de $[0, \dfrac{\pi}{2}[$ dans $[0,+\infty[$.

4.20 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$. Montrer que c'est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$ et déterminer son application réciproque f^{-1}.

4.21 Montrer que pour tout λ appartenant à $[0,+\infty[$ le polynome $x^3 + \lambda x + 1$ admet une unique racine réelle. On la note $f(\lambda)$.
Montrer que la fonction f ainsi définie est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.
Montrer que f réalise une bijection de $[0,+\infty[$ dans $[-1,0[$ et déterminer f^{-1}.

4.22 Julien a parcouru six kilomètres en une heure. Montrer qu'il a forcément parcouru trois kilomètres pendant une période de trente minutes.
On supposera que la distance parcourue est une fonction continue du temps, ce qui semble raisonnable.

4.23 Soit f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ telles que pour tout $x \in [a,b]$ $f(x) > g(x)$.
Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que pour tout $x \in [a,b]$ $f(x) > g(x) + m$.