Chapitre 9

Intégration

1 Introduction

La théorie de l'intégration est issue de la nécessité pratique de calculer les aires et les volumes. Les calculs d'aires de carrés, rectangles ou triangles n'ont jamais présenté de difficultés. En revanche, le calcul d'aire ou de volume de figures plus complexes a été un problème ardu.

L'avancée principale est due à Eudoxe de Cnide (408-355 av J. C.) qui a inventé la méthode d'exhaustion. Elle consiste à approcher une figure géométrique dont on veut calculer la longueur, l'aire ou le volume par des figures inscrites et circonscrites que l'on sait calculer. Par passage à la limite, on obtient le résultat recherché.

En utilisant de telles considérations, Eudoxe (400 - 355 av J. C.) a trouvé le volume de la pyramide et du cône circulaire. Archimède (287 - 212 av J. C.) a utilisé cette méthode pour calculer la circonférence du cercle, l'aire de l'ellipse, l'aire d'un segment de parabole, le centre de gravité d'un triangle, l'aire et le volume de la sphère etc.

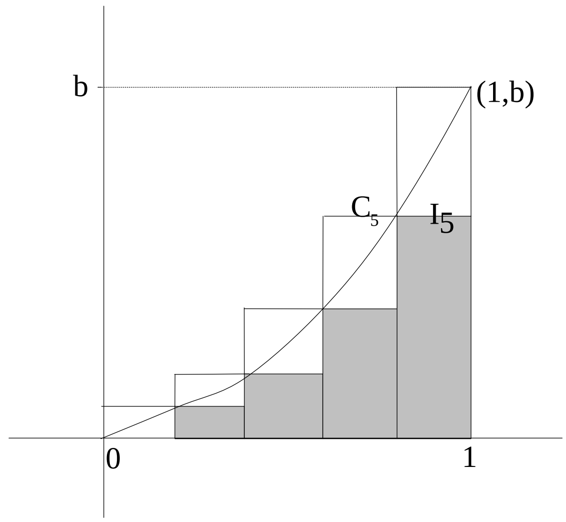
Les siècles suivants n'ont pas apporté de progrès notables, jusqu'au dix-septième siècle avec Cavalieri et Barrow et surtout Leibnitz et Newton qui ont fondé le calcul différentiel et intégral.

L'objet de ce chapitre sera de calculer l'aire de la surface comprise entre les droites $y = 0$, $x = a$, $x = b$ et le graphe d'une fonction f **bornée** sur l'intervalle $[a, b]$.

1.1 Calcul de l'aire d'un segment de parabole (Archimède)

C'est la deuxième démonstration d'Archimède, la première utilisait des triangles et était beaucoup plus compliquée. Celle-ci utilise des rectangles et correspond à la technique actuelle.

Soit la parabole d'équation $y = bx^2$ pour $0 \leq x \leq 1$. On cherche l'aire comprise entre la tangente à l'origine d'équation $y = 0$, le segment de parabole et la verticale d'équation $x = 1$.



On divise l'intervalle $[0,1]$ en n parties égales ($n=5$ sur la figure). On remarque que pour $\frac{k-1}{n} \leq x \leq \frac{k}{n}$ on a : $b\left(\frac{k-1}{n}\right)^2 \leq y \leq b\left(\frac{k}{n}\right)^2$.
On construit alors les polygones C_n et I_n montrés sur la figure. Tous les deux sont des réunions de rectangles. La frontière supérieure de C_n dans le $k^{\text{ième}}$ intervalle est le segment de droite :

$$\frac{k-1}{n} \leq x \leq \frac{k}{n}\ ,\ y = b\left(\frac{k}{n}\right)^2$$

et celle de I_n est le segment de droite :

$$\frac{k-1}{n} \leq x \leq \frac{k}{n}\ ,\ y = b\left(\frac{k-1}{n}\right)^2$$

La largeur de chaque rectangle est $\frac{1}{n}$.
En additionnant les aires des rectangles, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mu(C_n) &= b\left(\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 + \left(\frac{n}{n}\right)^2\right)\frac{1}{n} \\
\mu(I_n) &= b\left(\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right)\frac{1}{n}
\end{aligned}$$

On remarque que : $\mu(C_n) - \mu(I_n) = \frac{b}{n} \to 0$ quand $n \to \infty$.
On démontre (par récurrence) que :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Alors $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(C_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{b}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{b}{3}$.
En conclusion, l'aire comprise entre la tangente à l'origine d'équation $y=0$, le segment de parabole et la verticale d'équation $x=1$ est égale à $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(C_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(I_n) = \frac{b}{3}$.

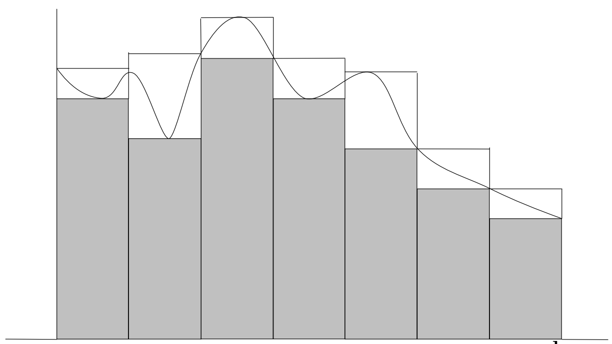
Ce très joli résultat fut beaucoup admiré, mais ses possibilités ne furent pas exploitées avant que Cavalieri, vers 1630, n'attaque et résolve le problème correspondant pour la parabole cubique $y = x^3$.
Exercice : Démontrer par récurrence la relation :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2 Fonction intégrable au sens de Riemann

2.1 Définition

Soit $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction **bornée**. L'objet de ce début de chapitre est de calculer l'aire, si elle existe, de la surface délimitée par les droites $y = 0$, $x = a$, $x = b$ et le graphe de f.
On peut approcher cette aire par la somme finie d'aires de rectangles comme suit : on divise l'intervalle $[a,b]$ en n intervalles $I_i = [a + (i-1)\frac{b-a}{n}, a + i\frac{b-a}{n}]$, $i = 1, \cdots, n$, de longueur $\frac{b-a}{n}$.



Alors l'aire recherchée, si on peut la mesurer, est comprise entre

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{b-a}{n} \text{ et } v_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \frac{b-a}{n},$$

où $M_i = \sup_{x \in I_i} f(x)$ et $m_i = \inf_{x \in I_i} f(x)$.
Remarque : La fonction f est bornée donc pour tout $i = 1, \cdots, n$, les réels m_i et M_i existent et on a $u_n \leq v_n$ pour tout $n \geq 1$.
Exercice : Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq 1/2 \\ 1 & \text{si } 1/2 < x \leq 1 \end{cases}$$

Calculer dans ce cas u_n et v_n.
Remarquer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ n'est pas croissante et que la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ n'est pas décroissante.

Définition 2.1.1 *On dit que f est* **intégrable** (*au sens de Riemann*) *sur $[a,b]$ si ces deux suites convergent et ont même limite. Cette limite s'appelle l'intégrale de f de a à b et se* *note :*

$$\int_a^b f(t)dt.$$

Remarque : Dans cette notation $\int_a^b f(t)dt$, la variable t est une variable "muette", en fait $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(s)ds = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(x)dx$, on emploie la variable que l'on veut.

Exercice : Montrer que les fonctions suivantes sont intégrables (au sens de Riemann) sur l'intervalle $[0,1]$:

1. $f : x \mapsto c$ où c est une constante.
2. $f : x \mapsto 2x+3$
3. $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \le x < 1/2 \\ 2 & \text{si} \quad x = 1/2 \\ 1 & \text{si} \quad 1/2 < x \le 1 \end{cases}$

Remarque : Il existe des fonctions bornées qui ne sont pas intégrables au sens de Riemann. En effet, soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \qquad x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

On sait que tout intervalle de $\mathbb{R}$, non réduit à un point, contient au moins un rationnel et un irrationnel. En reprenant les notations ci-dessus, on trouve $u_n = 0$ et $v_n = 1$ pour tout $n \ge 1$. Donc f n'est pas intégrable sur $[0,1]$.

Proposition 2.1.2 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction* **bornée***. Pour chaque n, on choisit $x_i \in I_i$, $i = 1, \cdots, n$ et on pose $w_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\frac{b-a}{n}$, $n \ge 1$.*
La fonction f est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$ si, et seulement si, **toutes** *les suites de la forme $(w_n)_{n\ge1}$ convergent vers une même limite.*

Démonstration :

1. Supposons que f est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$. Pour $x_i \in I_i$, on a : $m_i \le f(x_i) \le M_i$. Ce qui donne :

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{b-a}{n} \le \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\frac{b-a}{n} \le \sum_{i=1}^{n} M_i \frac{b-a}{n} = v_n.$$

   En utilisant le théorème d'encadrement, on sait que la suite $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\frac{b-a}{n}$ est convergente et converge vers $\int_a^b f(t)dt$.

2. Supposons que toutes les suites $(w_n)_{n\geq 1}$ tendent vers une limite L. Montrons que f est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$. Le réel $M_i - \dfrac{1}{n}$ n'est pas un majorant de $\{f(x);\, x \in I_i\}$ et donc il existe $x_i \in I_i$ tel que $M_i - \dfrac{1}{n} < f(x_i) \leq M_i$. (Voir chapitre 3, page 49, paragraphe 4.3. Borne supérieure).

   Ainsi pour chaque n, on trouve n nombres x_i de $[a,b]$, chacun pris dans I_i. On pose $w_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\frac{b-a}{n}$. On a

$$|L - v_n| = \left| L - \sum_{i=1}^{n} M_i \frac{b-a}{n} \right| \leq |L - w_n| + \left| w_n - \sum_{i=1}^{n} M_i \frac{b-a}{n} \right|$$

   Mais $\left| w_n - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} M_i \frac{b-a}{n} \right| = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (M_i - f(x_i))\frac{b-a}{n} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{b-a}{n}\right) = \frac{b-a}{n} \to 0$ quand $n \to +\infty$,

   et donc $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} M_i \frac{b-a}{n} = L$.

   On fait une démonstration analogue avec la suite $u_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{b-a}{n}$, car $m_i + \dfrac{1}{n}$ n'est plus un minorant de $\{f(x);\, x \in I_i\}$ et donc on peut trouver $\tilde{x}_i \in I_i$ tel que

$$m_i \leq f(\tilde{x}_i) < m_i + \frac{1}{n}.$$

   Ainsi pour chaque n, on trouve n nombres $\tilde{x}_i$ de $[a,b]$, chacun pris dans I_i. On pose $\widetilde{w}_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(\tilde{x}_i)\frac{b-a}{n}$. On a

$$|L - u_n| = \left| L - \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{b-a}{n} \right| \leq |L - \widetilde{w}_n| + \left| \widetilde{w}_n - \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{b-a}{n} \right|$$

   Mais $\left| \widetilde{w}_n - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{b-a}{n} \right| = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (f(\tilde{x}_i) - m_i)\frac{b-a}{n} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{b-a}{n}\right) = \frac{b-a}{n} \to 0$ quand $n \to +\infty$,

   et donc $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{b-a}{n} = L$.

   Donc f est intégrable au sens de Riemann et $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = L$.

Remarque : Les suites de la forme $(w_n)_{n\geq 1}$ sont dites **sommes de Riemann** attachées à la fonction f.

2.2 Propriétés de l'intégrale

Proposition 2.2.1 (Linéarité) *Soient f et g deux fonctions intégrables sur l'intervalle $[a,b]$. Alors $f+g$ est intégrable sur $[a,b]$ et*

$$\int_a^b (f+g)(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)\,dt.$$

Si λ est un nombre réel

$$\int_a^b \lambda f(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)\,dt.$$

Démonstration :
On écrit $\displaystyle\sum_{i=1}^n (f+g)(x_i)\frac{b-a}{n} = \sum_{i=1}^n f(x_i)\frac{b-a}{n} + \sum_{i=1}^n g(x_i)\frac{b-a}{n}$, puis on passe à la limite.
De même on écrit $\displaystyle\sum_{i=1}^n (\lambda f)(x_i)\frac{b-a}{n} = \lambda\sum_{i=1}^n f(x_i)\frac{b-a}{n}$, puis on passe à la limite.

Remarque : Si f et g sont deux fonctions intégrables sur l'intervalle $[a,b]$, on peut montrer que $f\cdot g$ est intégrable sur $[a,b]$, Par contre, généralement $\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)dt \neq \left(\int_a^b f(t)dt\right)\left(\int_a^b g(t)\,dt\right)$. Par exemple :
$\displaystyle\int_0^1 t^2dt = \frac{1}{3}$ et $\displaystyle\left(\int_0^1 tdt\right)\left(\int_0^1 tdt\right) = \frac{1}{4}$

Proposition 2.2.2 *Soient $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions égales sur $[a,b]$ sauf en un nombre fini de points. Si f est intégrable, il en est de même de g et $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \int_a^b g(t)dt$.*

Démonstration : Posons $h = f-g$. D'après la proposition précédente, il suffit de montrer que h est intégrable sur $[a,b]$ et que $\displaystyle\int_a^b h(t)dt = 0$.
Soient $c_1,\cdots,c_p,c_{p+1},\cdots,c_q$ les points où h est non nulle, avec $h(c_i)>0$ pour $i=1,\cdots,p$ et $h(c_i)<0$ pour $i=p+1,\cdots,q$.
Soit $N = \dfrac{b-a}{\min_{1\le i<j\le q}|c_i-c_j|} \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \geq N$, l'intervalle $I_i, i=1,\cdots,n$, contient **au plus** un c_j. Alors $u_n = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{i=p+1}^q h(c_i)$ et $v_n = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^p h(c_i)$. Alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$.

Proposition 2.2.3 (Positivité) *Si pour tout $x\in[a,b]$ $f(x)\geq 0$ et si f est intégrable sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt \geq 0$.*

Démonstration : Toutes les suites $\displaystyle\left(w_n = \sum_1^n f(x_i)\frac{b-a}{n}\right)_{n\geq 1}$ sont à termes positifs. Donc leur limite est positive (elle existe car f est intégrable).

Corollaire 2.2.4 *Si f et g sont intégrables sur $[a,b]$ et si pour tout $x \in [a,b]$ $f(x) \leq g(x)$, alors*

$$\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt.$$

Démonstration : Il suffit de prendre $h = g - f \geq 0$ et d'appliquer la proposition précédente.

Corollaire 2.2.5 (Encadrement) *Soit f intégrable sur $[a,b]$, M et m deux réels tels que pour tout $x \in [a,b]$, $m \leq f(x) \leq M$. Alors*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(t)dt \leq M(b-a).$$

Démonstration : Il suffit de prendre $h_1 = f - m$ et $h_2 = M - f$ et d'appliquer la proposition 2.2.3

Définition 2.2.6 (Valeur moyenne d'une fonction) *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$. Le nombre $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est appelé valeur moyenne de la fonction f sur $[a,b]$.*

Exercice : Vérifier que les valeurs moyennes sur $[0,2\pi]$ des fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \sin^2 x$ sont respectivement 0 et $\dfrac{1}{2}$. Quelle est la valeur moyenne de la fonction $x \mapsto \sin x$ sur $[0,\pi]$?

Définition 2.2.7 *Soit $f : [a,c] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur $[a,c]$. On définit par convention*

$$\int_c^a f(t)\,dt = -\int_a^c f(t)\,dt$$

et

$$\int_a^a f(t)\,dt = 0.$$

Remarque : Cette définition est compatible avec la définition de Riemann intégrable et les différentes propriétés de l'intégrale.

2.3 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Définition 2.3.1 *On dit que la fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue par morceaux si elle est continue sauf en un nombre* **fini** *de points $c_1, c_2, \cdots, c_N$ où $\lim_{x \to c_i^-} f(x)$ et $\lim_{x \to c_i^+} f(x)$ existent $(\in \mathbb{R})$.*

Remarque : Une fonction continue est continue par morceaux.

Théorème 2.3.2 (Résultat essentiel, admis)
Toute fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux, est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$.

Proposition 2.3.3 (Relation de Chasles) *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$, soit $c \in [a,b]$. Alors f est intégrable sur $[a,c]$ et sur $[c,b]$ et*

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)\,dt.$$

Remarque : Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$. On pose $f^+(t) = \max(f(t),0)$ et $f^-(t) = \max(-f(t),0)$ pour tout $t \in [a,b]$. Les deux fonctions f^- et f^+ sont positives. On peut montrer qu'elles sont continues par morceaux sur $[a,b]$ et on a $f = f^+ - f^-$ sur $[a,b]$. Grâce à la linéarité de l'intégrale (voir proposition 2.2.1), il suffit de démontrer la relation de Chasles pour les fonctions positives.

Démonstration : Supposons que f est positive. La fonction f est continue par morceaux sur $[a,b]$ donc ses restrictions sur $[a,c]$ et $[c,b]$ sont aussi continues par morceaux respectivement sur $[a,c]$ et $[c,b]$. En utilisant le théorème 2.3.2, on sait que f est intégrable sur $[a,c]$, $[c,b]$ et sur $[a,b]$. Alors

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n,$$

où $u_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{b-a}{n}$ et $v_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \frac{b-a}{n}$ avec $M_i = \sup_{x\in I_i} f(x)$ et $m_i = \inf_{x\in I_i} f(x)$ et $I_i = [a+(i-1)\frac{b-a}{n}, a+i\frac{b-a}{n}]$, $i = 1,\cdots,n$.

De même

$$\int_a^c f(t)dt = \lim_{n\to+\infty} \widehat{u}_n = \lim_{n\to+\infty} \widehat{v}_n$$

où $\widehat{u}_n = \sum_{i=1}^{n} \widehat{m}_i \frac{c-a}{n}$ et $\widehat{v}_n = \sum_{i=1}^{n} \widehat{M}_i \frac{c-a}{n}$ avec $\widehat{M}_i = \sup_{x\in \widehat{I}_i} f(x)$ et $\widehat{m}_i = \inf_{x\in \widehat{I}_i} f(x)$ et $\widehat{I}_i = [a+(i-1)\frac{c-a}{n}, a+i\frac{c-a}{n}]$, $i = 1,\cdots,n$.

De même

$$\int_c^b f(t)dt = \lim_{n\to+\infty} \widetilde{u}_n = \lim_{n\to+\infty} \widetilde{v}_n$$

où $\widetilde{u}_n = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{m}_i \frac{b-c}{n}$ et $\widetilde{v}_n = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{M}_i \frac{b-c}{n}$ avec $\widetilde{M}_i = \sup_{x\in \widetilde{I}_i} f(x)$ et $\widetilde{m}_i = \inf_{x\in \widetilde{I}_i} f(x)$ et $\widetilde{I}_i = [c+(i-1)\frac{b-c}{n}, c+i\frac{b-c}{n}]$, $i = 1,\cdots,n$.

Remarquons que $\int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt = \lim_{n\to+\infty} (\widehat{u}_n + \widetilde{u}_n) = \lim_{n\to+\infty} (\widehat{v}_n + \widetilde{v}_n)$.

Comparons maintenant $\widehat{u}_n + \widetilde{u}_n$ et v_n pour tous $n \geq 1$.

Puisque f est positive, l'élément $\widehat{u}_n + \widetilde{u}_n$ est l'aire d'une réunion de rectangles en dessous du graphe de f alors que v_n est l'aire d'une réunion de rectangles contenant la surface entre l'axe des abscisses et le graphe de f.

D'où $\widehat{u}_n + \widetilde{u}_n \leq v_n$ pour tous $n \geq 1$ et donc par passage à la limite on obtient :

$$\int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt \leq \int_a^b f(t)dt.$$

De même, en comparant $\widehat{v}_n + \widetilde{v}_n$ et u_n pour tous $n \geq 1$ et en passant à la limite, on obtient

$$\int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt \geq \int_a^b f(t)dt.$$

Par suite $\displaystyle\int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt = \int_a^b f(t)dt.$

Proposition 2.3.4 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux, alors $|f|$ est intégrable sur $[a,b]$ et*

$$\left| \int_a^b f(t)\, dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$

Démonstration : Si f est continue par morceaux sur $[a,b]$. On peut démontrer que $|f|$ est continue par morceaux sur $[a,b]$ et donc intégrable sur $[a,b]$.
Pour tout $t \in [a,b]$, on a : $-|f(t)| \leq f(t) \leq |f(t)|$. D'où

$$-\int_a^b |f(t)|dt = \int_a^b -|f(t)|dt \leq \int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b |f(t)|dt$$

et le résultat s'obtient avec la définition de la valeur absolue.

Théorème 2.3.5 (Théorème de la moyenne) *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction* **continue**. *Alors, il existe $c \in [a,b]$ tel que $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = f(c)(b-a)$.*

Démonstration : La fonction f est continue sur $[a,b]$ donc il existe deux réels m, M tels que $f([a,b]) = [m, M]$. (Voir chapitre 4, page 66, paragraphe 3.3, théorème 3.3.4). Par le théorème d'encadrement, on a

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(t)dt \leq M(b-a),$$

et donc

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt \leq M.$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires (chapitre 4, page 65, paragraphe 3.3, théorème 3.3.1), il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = \dfrac{1}{b-a} \displaystyle\int_a^b f(t)dt.$

Exercice : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et positive.

1. Montrer que, si $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = 0$ alors $f = 0$.

2. Expliquer par des exemples pourquoi les hypothèses f continue et f positive sont **indispensables**.

3 Relation entre intégrale et primitive

3.1 Rappel

Définition 3.1.1 *Une fonction F est une primitive d'une fonction f si $F' = f$.*

Remarques:
1. La primitive **n'est pas unique** et si F_1 et F_2 sont deux primitives de f définies sur un même intervalle, alors $F_1 - F_2$ est une constante.
2. Notation: si F est une primitive de f on note $F = \int f(t)\,dt$.

Voici une liste de primitives usuelles: (elles sont définies à une constante additive près!)

Fonctions			Primitives
$x \mapsto x^\alpha$	$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$(x \in \mathbb{R}_+^*)$	$x \mapsto \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$x \mapsto \mathrm{e}^x$		$(x \in \mathbb{R})$	$x \mapsto \mathrm{e}^x$
$x \mapsto \cos x$		$(x \in \mathbb{R})$	$x \mapsto \sin x$
$x \mapsto \sin x$		$(x \in \mathbb{R})$	$x \mapsto -\cos x$
$x \mapsto 1 + \mathrm{tg}^2\, x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$		$(x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[)$	$x \mapsto \mathrm{tg}\, x$
$x \mapsto \mathrm{ch}\, x$		$(x \in \mathbb{R})$	$x \mapsto \mathrm{sh}\, x$
$x \mapsto \mathrm{sh}\, x$		$(x \in \mathbb{R})$	$x \mapsto \mathrm{ch}\, x$
$x \mapsto 1 - \mathrm{th}^2\, x = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2\, x}$		$(x \in \mathbb{R})$	$x \mapsto \mathrm{th}\, x$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$		$(x \in \left]-1, 1\right[)$	$x \mapsto \mathrm{Arcsin}\, x$
$x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$		$(x \in \mathbb{R})$	$x \mapsto \mathrm{Arctg}\, x$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$		$(x \in \mathbb{R})$	$x \mapsto \mathrm{Argsh}\, x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$		$(x \in \left]1, \infty\right[)$	$x \mapsto \mathrm{Argch}\, x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$

$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ $\quad (x \in]-\infty,-1[)$	$x \mapsto \ln\left\lvert x+\sqrt{x^2-1}\right\rvert$
$x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$ $\quad (x \in]-1,1[)$	$x \mapsto \operatorname{Argth} x = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$
$x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$ $\quad (x \in]-\infty,-1[)$ ou $(x \in]1,\infty[)$	$x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln\left\lvert\dfrac{1+x}{1-x}\right\rvert$

Théorème 3.1.2 (Théorème fondamental) *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction* **continue**. *Pour $x \in [a,b]$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$. Alors $F(a) = 0$, F est dérivable sur $[a,b]$ et $F'(x) = f(x)$.*

On dit que F est **la** primitive de f qui s'annule au point a.

Démonstration : On cherche si $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$ existe.
Par la relation de Chasles :

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt$$

En utilisant le théorème de la moyenne,

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt = f(c_h)$$

avec $x \leq c_h \leq x+h$ ou $x+h \leq c_h \leq x$.
Puisque f est continue en x :

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(c_h) = f(x)$$

D'où le résultat.

Corollaire 3.1.3 *Si G une primitive de f définie sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = G(b)-G(a)$. On utilise souvent la notation : $[G(x)]_a^b = G(b) - G(a)$*

Démonstration : Soit G une primitive de f définie sur $[a,b]$.
On sait que $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ est **la** primitive de f qui s'annule au point a. La fonction $G-F$ est donc constante sur $[a,b]$. Comme $F(a) = 0$ on a $G(x) - F(x) = G(a)$ pour tout $x \in [a,b]$. En particulier, pour $x = b$ on a $G(b) - F(b) = G(a)$ et donc $G(b) - G(a) = F(b)$.
D'où le résultat.
Ce résultat fournit une méthode de calcul de certaines intégrales.

4 Méthodes de calcul

4.1 Intégration par parties

Proposition 4.1.1 *Soient f et g deux fonctions dérivables et de dérivées continues sur $[a,b]$. Alors :*

$$\int_a^b f'(t)g(t)dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)\,dt.$$

Démonstration : Soit f et g deux fonctions continûment dérivables de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, le produit est dérivable avec $(fg)' = f'g + fg'$ et on obtient facilement le résultat.

Mode d'emploi : *La fonction que l'on veut intégrer doit se présenter sous la forme du produit de deux fonctions. Il faut choisir celle que l'on doit dériver (la fonction g de la formule) et celle que l'on va intégrer (la fonction f' de la formule). Il faut bien sûr faire le bon choix, pour se ramener à une intégration plus simple à réaliser.*

Exemple 1: Calculer $I = \displaystyle\int_1^x \ln t\,dt, \forall x > 0.$

On pose : $f'(t) = 1 \Leftarrow f(t) = t$ et $g(t) = \ln t \Rightarrow g'(t) = \dfrac{1}{t}$, ce qui donne

$$I = \int_1^x \ln t\,dt = [t\ln t]_1^x - \int_1^x t\frac{1}{t}\,dt = x\ln x - [t]_1^x = x\ln x - x + 1.$$

Exemple 2: Calculer $I = \displaystyle\int_0^x P(t)e^{\alpha t}\,dt$ où P est un polynôme et α un réel non nul.

Il est clair que pour simplifier l'intégrale il faut dériver le polynôme et intégrer l'exponentielle. On obtient donc

$$I = [\frac{1}{\alpha}P(t)e^{\alpha t}]_0^x - \int_0^x P'(t)e^{\alpha t}\,dt.$$

On est ramené à une intégrale du même type, mais avec un polynôme de degré inférieur. On recommence donc le processus, au bout d'un nombre fini d'itérations on est ramené simplement au calcul de $I = \displaystyle\int_0^x e^{\alpha t}\,dt.$

Exercice : Calculer $I = \displaystyle\int_0^x (t^2 + 3t - 1)e^t\,dt,\ \forall x \in \mathbb{R}.$

Exemple 3: Calculer $I = \displaystyle\int_0^x P(t)\sin\alpha t\,dt, \forall x \in \mathbb{R}$, où P est un polynôme et α un réel non nul.

Exemple 4: Calculer $I = \displaystyle\int_0^x e^{\alpha t}\sin(\beta t)\,dt, \forall x \in \mathbb{R}$, où α, β sont deux réels non nuls.

Dériver ou intégrer $e^{\alpha t}$ et $\sin(\beta t)$ ne change pas grand chose. Posons par exemple
$f'(t) = e^{\alpha t} \Leftarrow f(t) = \dfrac{1}{\alpha}e^{\alpha t}$ et $g(t) = \sin(\beta t) \Rightarrow g'(t) = \beta\cos(\beta t).$
Nous obtenons

$$I = [\frac{1}{\alpha}e^{\alpha t}\sin(\beta t)]_0^x - \frac{\beta}{\alpha}\int_0^x e^{\alpha t}\cos(\beta t)\,dt.$$

Nous sommes ramenés à une intégrale du même type : nous faisons une seconde intégration par parties qui ne nous ramène pas au point de départ c'est à dire nous continuons à intégrer $e^{\alpha t}$ et à dériver la fonction trigonométrique $\cos(\beta t)$:
$f'(t) = e^{\alpha t} \Leftarrow f(t) = \dfrac{1}{\alpha}e^{\alpha t}$ et $g(t) = \cos(\beta t) \Rightarrow g'(t) = -\beta\sin(\beta t)$.
Nous obtenons

$$I = [\frac{1}{\alpha}e^{\alpha t}\sin(\beta t)]_0^x - \frac{\beta}{\alpha}[\frac{1}{\alpha}e^{\alpha t}\cos(\beta t)]_0^x - \Big(\frac{\beta}{\alpha}\Big)^2\int_0^x e^{\alpha t}\sin(\beta t)\,dt,$$

donc

$$I = \Big(1+(\frac{\beta}{\alpha})^2\Big)^{-1}\Big([\frac{1}{\alpha}e^{\alpha t}\sin(\beta t)]_0^x - \frac{\beta}{\alpha}[\frac{1}{\alpha}e^{\alpha t}\cos(\beta t)]_0^x\Big),$$

d'où

$$I = \Big(1+(\frac{\beta}{\alpha})^2\Big)^{-1}\Big(\frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}\sin(\beta x) - \frac{\beta}{\alpha^2}\big(e^{\alpha x}\cos(\beta x)-1\big)\Big).$$

Exercice : Calculer $I = \displaystyle\int_0^x e^t\cos 2t\,dt,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

4.2 Application du théorème d'intégration par parties : formule de Taylor avec reste intégral

Définition 4.2.1 *Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. La fonction f est dite de classe C^n si et seulement si f est n-fois dérivable et la dérivée $n^{ième}$ est continue.*

Théorème 4.2.2 (formule de Taylor avec reste intégral) *Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ de classe C^{n+1}. Alors*

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b\frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

Démonstration : Nous allons démontrer le résultat par récurrence sur n, en notant (A_n) l'assertion à prouver.
L'assertion (A_0) s'écrit $f(b) = f(a) + \displaystyle\int_a^b f'(t)\,dt$, pour f de classe C^1 sur $[a,b]$. Elle est vraie d'après le corollaire 3.1.3.
Supposons que (A_{n-1}) soit vraie et montrons qu'il en est de même pour (A_n). On a donc

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b\frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t)\,dt.$$

Soit $I_n = \displaystyle\int_a^b\frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t)\,dt$. On fait une intégration par partie, en posant :

$$u'(t) = \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} \Leftarrow u(t) = -\frac{(b-t)^n}{n!}$$

$$v(t) = f^{(n)}(t) \Rightarrow v'(t) = f^{(n+1)}(t)$$

on obtient

$$I_n = \big[-f^{(n)}(t)\frac{(b-t)^n}{n!}\big]_a^b - \int_a^b -\frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt$$

donc

$$I_n = \frac{f^{(n)}(a)}{k!}(b-a)^n + I_{n+1}.$$

Ainsi (A_n) est vraie.

Corollaire 4.2.3 (Inégalité de Taylor-Lagrange) *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C^{n+1}. On suppose que pour tout $t \in [a,b]$ on a $\left|f^{(n+1)}(t)\right| \leq M$. Alors*

$$\left|f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k\right| \leq M\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Démonstration : La formule de Taylor avec reste intégral nous donne

$$\left|f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k\right| = \left|\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt\right|.$$

Grâce à la proposition 2.3.4 et au corollaire 2.2.4, on a

$$\left|\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt\right| \leq \int_a^b \left|\frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\right| dt \leq M \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}\, dt = M\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Exemple : Posons $f(x) = e^x$ définie sur $[0,1]$. Pour tout $x \in [0,1]$, on sait que $|f^{(n+1)}(x)| = |e^x| \leq e = M$, et que $f^{(k)}(0) = e^0 = 1,\ f(1) = e$. L'inégalité de Taylor-Lagrange s'écrit donc

$$\left|e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right| \leq e\frac{1}{(n+1)!}.$$

Puisque la suite $(\frac{1}{(n+1)!})_n$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini, on en déduit que la suite de terme général $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ converge vers e.

Question : Démontrer de façon analogue que pour tout x réel la suite $v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ converge vers e^x.

4.3 Changement de variable

Proposition 4.3.1 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $[a,b]$, de dérivée continue, avec $f([a,b]) \subset [c,d]$ et soit $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[c,d]$. Alors*

$$\int_a^b g(f(t)) \cdot f'(t)dt = \int_{f(a)}^{f(b)} g(u)du.$$

Démonstration : Si G est une primitive de g,

$$\int_{f(a)}^{f(b)} g(u)du = G(f(b)) - G(f(a)).$$

D'autre part, $G \circ f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est dérivable et de dérivée :

$$(G \circ f)'(x) = g(f(x)) \cdot f'(x)$$

c'est donc une primitive de la fonction $x \mapsto g(f(x)) \cdot f'(x)$. Donc :

$$\int_a^b g(f(t)) \cdot f'(t)dt = G(f(b)) - G(f(a))$$

D'où l'égalité recherchée.

Mode d'emploi : *Un changement de variable se fait avec trois opérations :*
- Remplacer u par $f(t)$
- Remplacer du par $f'(t)dt$
- Remplacer les bornes $f(a)$ et $f(b)$ par a et b!

Exemple 1: Calcul de $I = \displaystyle\int_1^x \frac{(\ln t)^n}{t} dt$ où $x > 0$ et n un entier fixé.
Compte-tenu de la présence de $\frac{1}{t}$ qui est la dérivée de $\ln t$, on peut se dire que la "vraie variable" dans cette intégrale est $u = \ln t$, avec $\dfrac{dt}{t} = du$:

$$I = \int_{\ln 1}^{\ln x} u^n \, du = [\frac{u^{n+1}}{n+1}]_0^{\ln x} = \frac{(\ln x)^{n+1}}{n+1}.$$

Exemple 2: Prouver que $I = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-u^2}\, du = \frac{\pi}{4}$ en posant $u = \sin t,\ t \in [0, \dfrac{\pi}{2}]$.

Exemple 3: Prouver que $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{u}{u^4+1} du = \frac{\pi}{8}$ en posant $u = \sqrt{t}$.

Exemple 4: Prouver que $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{u^2+u+1} du = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$, en remarquant que $u^2 + u + 1 = \dfrac{3}{4}\Big[(\dfrac{2u+1}{\sqrt{3}})^2 + 1\Big]$ et en choisissant un changement de variable adéquat.

Exercice : Soit f une fonction continue sur $[-a, a]$. Montrer que

$$\int_{-a}^{a} f(t)dt = \begin{cases} 2\displaystyle\int_0^a f(t)dt & \text{si } f \text{ est paire} \\ 0 & \text{si } f \text{ est impaire .} \end{cases}$$

4.4 Primitives exprimées avec la fonction logarithme

La fonction qui à x associe $\ln|x|$ est définie continue dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et sa dérivée est égale à $\dfrac{1}{x}$ que x soit positif ou négatif.
Nous retiendrons donc qu'une primitive de $\dfrac{1}{x}$ est $\ln|x|$ sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$; plus généralement retenons que sur tout intervalle où $f(x)$ ne s'annule pas une primitive de $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ est $\ln|f(x)|$.
Exemple 1: Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_0^x \frac{2u+1}{u^2+u+1} du = \int_0^x \frac{(u^2+u+1)'}{u^2+u+1} du = \big[\ln\big|u^2+u+1\big|\big]_0^x = \ln\big|x^2+x+1\big|.$$

Le polynôme $P(u) = u^2 + u + 1 \neq 0$ sur $\mathbb{R}$ car son discriminant $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$.

Exemple 2: Pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, on a

$$\int_0^x \tan u\,du = \int_0^x \frac{\sin u}{\cos u}\,du = -\int_0^x \frac{(\cos u)'}{\cos u}\,du = \big[-\ln|\cos u|\big]_0^x = -\ln|\cos x|.$$

4.5 Primitives des polynômes trigonométriques

Il s'agit de savoir intégrer les fonctions du type $t \mapsto \sin^p t\cos^q t$ où p et q sont des entiers.

1. Si p est impair (respectivement q est impair) on pose $u = \cos t$ (respectivement $u = \sin t$) et on obtient, en utilisant la formule $\sin^2 s + \cos^2 s = 1$, une expression de la forme $\sin t \cdot Q(\cos t)dt = -Q(u)du$ (respectivement $\cos t \cdot Q(\sin t)dt = Q(u)du$).
En notant Q_1 une primitive du polynôme Q, la primitive cherchée vaut donc $-Q_1(\cos t)$ (resp. $Q_1(\sin t)$)

Exemple : Calculer une primitive de $\sin^4 t\cos^3 t$.
Comme $q = 3$ impair, on effectue le changement de variable $u = \sin t$ on a $du = \cos t dt$ et

$$\sin^4 t\cos^3 t = \sin^4 t(1-\sin^2 t)\cos t = Q(\sin t)\cos t$$

avec $Q(u) = u^4(1-u^2) = u^4 - u^6$.
Soit $Q_1(u) = \frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7}$ une primitive de polynôme Q donc une primitive de $\sin^4 t\cos^3 t$ est

$$Q_1(\sin t) = \frac{\sin^5 t}{5} - \frac{\sin^7 t}{7}.$$

Exercice : Donner une primitive de $\cos^5 t$.

2. Si p et q sont pairs on linéarise!.

Exemple : Calculer une primitive de $\cos^6 t$.
On commence par linéariser $\cos^6 t$ on obtient $\cos^6 t = \frac{1}{2^5}\big(\cos 6t + 6\cos 4t + 15\cos 2t + 10\big)$, on en déduit que

$$\int \cos^6 t\,dt = \frac{1}{32}\big(\frac{\sin 6t}{6} + \frac{3\sin 4t}{2} + \frac{15\sin 2t}{2} + 10t\big) + C.$$

Exercice : Donner une primitive de $\cos^4 t\sin^6 t$.

Remarque : *La méthode de linéarisation est valable dans tous les cas mais la méthode préconisée quand l'un des exposants est impair est beaucoup plus rapide.*

5 Primitives des fractions rationnelles

5.1 Définition

Définition 5.1.1 *On appelle fraction rationnelle sur $\mathbb{R}$ toute fonction f définie par une relation de la forme $f(x) = \frac{P_1(x)}{P_2(x)}$ où P_1, P_2 sont deux polynômes à coefficients* **réels**.

Les fonctions $f(x) = \frac{x+4}{x^3 - 2x^2 + 5x + 7}$ et $g(x) = \frac{x^5 - 3 + x^3 + 2x + 6}{x^2+1}$ sont des fractions rationnelles sur $\mathbb{R}$.

Définition 5.1.2 *On appelle élément simple sur $\mathbb{R}$ une fraction rationnelle d'un des deux types suivants :*
1. Élément simple de première espèce : $\dfrac{A}{(x-a)^n}$ *où A et a sont des réels et n un entier strictement positif.*
2. Élément simple de deuxième espèce : $\dfrac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^m}$ *où B, C, b, c sont des réels tels que $b^2-4c<0$ et m un entier strictement positif.*

5.2 Primitives des fractions rationnelles de référence

I. Primitives des éléments simples de première espèce.

La fonction $x \mapsto \dfrac{A}{(x-a)^n}$, où $A, a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ admet des primitives sur tout intervalle inclus dans $]-\infty, a[\cup]a, +\infty[$.

1. $\displaystyle \int \frac{A}{x-a}dx \quad = \quad A\ln|x-a| + C$

2. $\displaystyle \int \frac{A}{(x-a)^n}dx \quad = \quad -\frac{A}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C$ pour $n>1$

II. Primitives des éléments simples de deuxième espèce.

La fonction $x \mapsto \dfrac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^m}$ où $B, C, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $\Delta = b^2-4c<0$ et $m \in \mathbb{N}^*$, admet des primitives sur tout intervalle de $\mathbb{R}$.
On remarque que $x^2+bx+c = (x+\frac{b}{2})^2 - \frac{\Delta}{4}$. Donc

$$\frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^m} = \frac{Bx+C}{\left((x+\frac{b}{2})^2-\frac{\Delta}{4}\right)^m} = \frac{B}{2}\frac{2x+b}{\left((x+\frac{b}{2})^2-\frac{\Delta}{4}\right)^m} + (C-\frac{Bb}{2})\frac{1}{\left((x+\frac{b}{2})^2-\frac{\Delta}{4}\right)^m}.$$

Donc, chercher une primitive de $\dfrac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^m}$ revient à chercher une primitive de chacun des deux quantités suivantes :

$$\frac{2x+b}{(x^2+bx+c)^m} \quad \text{et} \quad \frac{1}{(x^2+bx+c)^m}.$$

1. $\displaystyle \int \frac{2x+b}{(x^2+bx+c)^m}dx$ où $\Delta = b^2-4c<0$ et $m \geq 1$.

   On fait le changement de variable $u = x^2+bx+c$ et on est ramené à $\displaystyle\int \frac{du}{u^n}$ et donc à la primitive des éléments simples de première espèce avec $a=0$.

2. $\displaystyle \int \frac{1}{(x^2+bx+c)^m}dx$ où $\Delta = b^2-4c<0$ et $m \geq 1$. On a :

   $$x^2+bx+c = \left(x+\frac{b}{2}\right)^2 - \frac{\Delta}{4} = -\frac{\Delta}{4}\left[\left(\frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\left(x+\frac{b}{2}\right)\right)^2+1\right]$$

On fait le changement de variable $t = \dfrac{2}{\sqrt{-\Delta}}\left(x + \dfrac{b}{2}\right)$ et on est amené à calculer les primitives de la forme $I_m = \displaystyle\int \frac{dt}{(t^2+1)^m}$ avec $m \geq 1$.

On fait une intégration par parties en posant :

$$\begin{array}{lcl} u'(t) = 1 & \Leftarrow & u(t) = t \\ v(t) = \dfrac{1}{(t^2+1)^m} & \Rightarrow & v'(t) = -\dfrac{2mt}{(t^2+1)^{m+1}} \end{array}$$

On obtient :

$$I_m = \frac{t}{(t^2+1)^m} + 2m \int \frac{t^2}{(t^2+1)^{m+1}} dt,$$

donc

$$I_m = \frac{t}{(t^2+1)^m} + 2m \left[\int \frac{dt}{(t^2+1)^m} - \int \frac{dt}{(t^2+1)^{m+1}} \right].$$

C'est-à-dire : I_m et I_{m+1} sont liés par la relation :

$$I_m = \frac{t}{(t^2+1)^m} + 2m(I_m - I_{m+1}).$$

On obtient ainsi un calcul par récurrence de I_m :

$$\begin{cases} I_{m+1} & = & \dfrac{1}{2m}\dfrac{t}{(t^2+1)^m} + \dfrac{2m-1}{2m} I_m \\ I_1 & = & \operatorname{Arctg} t \end{cases}$$

5.3 Décomposition des fractions rationnelles en éléments simples et primitives

Théorème 5.3.1 (**admis**) *Toute fraction rationnelle sur $\mathbb{R}$ s'écrit de façon unique comme somme d'un polynôme (appelé partie entière de la fraction) et un certain nombre d'éléments simples dont le type est déterminé par le dénominateur de la fraction.*

Soit f une fraction rationnelle sur $\mathbb{R}$. Donc il existe P_1, P_2 deux polynômes à coefficients réels tels que $f = \dfrac{P_1}{P_2}$.

Première étape : Effectuons la division euclidienne du polynôme P_1 par P_2, d'après le théorème de la division euclidienne (chapitre2, page 30, théorème 2.0.4), on sait qu'il existe **un unique** couple $(Q, R) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X]$ tel que $P_1 = P_2 Q + R$ avec $\deg R < \deg P_2$. Donc $f = \dfrac{P_1}{P_2} = Q + \dfrac{R}{P_2}$ avec $\deg R < \deg P_2$. Le polynôme Q est la partie entière de la fraction f.

Remarque : Chercher une primitive de la fraction rationnelle f sur $\mathbb{R}$ revient à trouver une primitive du polynôme Q (la partie entière de f) et une primitive de $f_1 = \dfrac{R}{P_2}$, $\deg R < \deg P_2$.

Deuxième étape : Maintenant on s'intéresse à la fraction rationnelle $f_1 = \dfrac{R}{P_2}$, $\deg R < \deg P_2$.
Sachant que les éléments irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 dont le discriminant est strictement négatif alors si on décompose P_2 dans $\mathbb{R}[X]$ on obtient :

$$P_2(X) = (X-a_1)^{n_1}\cdots(X-a_p)^{n_p}(X^2+b_1X+c_1)^{m_1}\cdots(X^2+b_kX+c_k)^{m_k},$$

où $a_i \in \mathbb{R}, n_i \in \mathbb{N}^*$, pour tous $i = 1,\cdots,p$ et $b_j, c_j \in \mathbb{R}$ tels que $b_j^2 - 4c_j < 0$ et $m_j \in \mathbb{N}^*$, pour tous $j = 1,\cdots,k$.

Théorème 5.3.2 (admis) *Soit* $f_1 = \dfrac{R}{P_2}$ *une fraction rationnelle telle que* $\deg R < \deg P_2$.
Si la décomposition dans $\mathbb{R}[X]$ *en facteurs irréductibles de* P_2 *est :*

$$P_2(X) = (X-a_1)^{n_1}\cdots(X-a_p)^{n_p}(X^2+b_1X+c_1)^{m_1}\cdots(X^2+b_kX+c_k)^{m_k},$$

alors la décomposition unique de f_1 *en éléments simples sur* $\mathbb{R}$ *est :*

$$f_1(X) = \sum_{i=1}^{p} \frac{A_{i,1}}{(X-a_i)^{n_i}} + \frac{A_{i,2}}{(X-a_i)^{n_i-1}} + \cdots + \frac{A_{i,n_i}}{(X-a_i)} +$$

$$+\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{B_{j,1}X+C_{j,1}}{(X^2+b_jX+c_j)^{m_j}} + \frac{B_{j,2}X+C_{j,2}}{(X^2+b_jX+c_j)^{m_j-1}} + \cdots + \frac{B_{j,m_j}X+C_{j,m_j}}{(X^2+b_jX+c_j)}\right)$$

Tous les coefficients sont dans $\mathbb{R}$.

Remarque : On connaît les primitives des éléments simples sur $\mathbb{R}$ (paragraphe 5.2) donc avec la linéarité de l'intégrale et le théorème précédent on trouve les primitives de la fraction rationnelle f_1 et donc ceux de f!

Question : *Comment calculer les coefficients* $A_{i,j}, B_{j,i}$ *et* $C_{j,i}$ *intervenant dans la décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples ?*

Quelques techniques de calcul sur des exemples

Soit $f_1 = \dfrac{R}{P_2}$, $\deg R < \deg P_2$ une fraction rationnelle sur $\mathbb{R}$.

1. Décomposer $f_1(X) = \dfrac{X+2}{X^2-3X-4}$
Le polynôme $X^2 - 3X - 4$ possède deux racines réelles -1 et 4. Donc (par le théorème de décomposition) la fraction rationnelle f_1 sur $\mathbb{R}$ s'écrit :

$$f_1(X) = \frac{X+2}{(X-4)(X+1)} = \frac{A_1}{X-4} + \frac{A_2}{X+1}.$$

Calcul de A_1 : Si nous multiplions par $(X-4)$ l'identité au dessus valable pour tout X différent de 4 et de -1 nous obtenons,

$$\frac{X+2}{X+1} = A_1 + \frac{A_2(X-4)}{X+1},$$

une nouvelle égalité de fractions rationnelles valable pour $X \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et si nous faisons alors $X = 4$ dans cette égalité on obtient $\frac{6}{5} = A_1$. Il est totalement inutile de connaître A_2 pour calculer A_1 puisque la fraction rationnelle suivant A_2 s'annule pour $X = 4$.

Calculer avec la même méthode A_2.

Technique 1: *Si a est une racine simple du dénominateur P_2, pour obtenir le coefficient " au dessus de $X - a$," on "masque" $X - a$ au dénominateur de la fraction et on fait $X = a$ dans ce qui reste.*

2. Décomposer $f_1(X) = \dfrac{3X+1}{(X+1)^2}$

Le réel -1 est une racine double de $P_2(X) = (X+1)^2$. Donc

$$f_1(X) = \frac{3X+1}{(X+1)^2} = \frac{A_1}{(X+1)^2} + \frac{A_2}{X+1}.$$

Si nous multiplions l'identité par $(X+1)^2$ nous obtenons la relation

$$3X + 1 = A_1 + A_2(X+1)$$

en faisant $X = -1$ nous avons $-2 = A_1$. C'est donc la technique précédente.
Pour calculer A_2 c'est un peu différent, multiplions f_1 par X, ce qui donne

$$Xf_1(X) = \frac{X(3X+1)}{(X+1)^2} = A_1\frac{X}{(X+1)^2} + A_2\frac{X}{X+1}.$$

En faisant tendre X vers l'infini, les limites des deux termes de l'égalité sont égales, à droite la limite est égale à A_2 (le terme en facteur de A_1 tend vers 0) et à gauche la limite vaut 3. On a donc $3 = A_2$ et

$$f_1(X) = \frac{3X+1}{(X+1)^2} = \frac{-2}{(X+1)^2} + \frac{3}{X+1}.$$

Technique 2: *Si a est une racine double du dénominateur P_2, pour obtenir le coefficient " au dessus de $X - a$," on multiplie par X et on fait tendre X vers l'infini.*

3. Décomposer $f_1(X) = \dfrac{3X^2-7}{(X-2)^3}$

Le réel 2 est une racine triple de $P_2(X) = (X-2)^3$. Donc

$$f_1(X) = \frac{3X^2-7}{(X-2)^3} = \frac{A_1}{(X-2)^3} + \frac{A_2}{(X-2)^2} + \frac{A_3}{X-2}.$$

Par la technique 1, on obtient $5 = A_1$ et par la technique 2 décrite ci-dessus, on obtient $3 = A_3$ ce qui nous donne :

$$f_1(X) = \frac{3X^2-7}{(X-2)^3} = \frac{5}{(X-2)^3} + \frac{A_2}{(X-2)^2} + \frac{3}{X-2}.$$

En faisant (par exemple) $X = 3$ dans cette égalité on obtient $20 = 5 + A_2 + 3$ donc $A_2 = 12$.

Technique 3: *On donne à X une valeur particulière et on identifie.*

Exemple Décomposer $f_1(X) = \dfrac{-3X^2+X+1}{X^3+X-2}$ sur $\mathbb{R}$.

Le polynôme $P_2(X) = X^3 + X - 2$ posséde une seule racine réelle qui est égale à 1. Dans $\mathbb{R}[X]$,

$$P_2(X) = (X-1)(X^2+X+2)$$

avec $\Delta = 1 - 8 = -7 < 0$ Donc (par le théorème de décomposition) la fraction rationnelle f_1 sur $\mathbb{R}$ s'écrit :

$$f_1(X) = \frac{-3X^2+X+1}{(X-1)(X^2+X+2)} = \frac{A_1}{X-1} + \frac{B_1X+C_1}{X^2+X+2}.$$

Par la technique 1, en masquant $(X-1)$ dans la fraction et en faisant $X = 1$ dans ce qui reste on obtient $\dfrac{-1}{4} = A_1$.

Par la technique 2, en multipliant par X et en faisant tendre X vers l'infini, on obtient $-3 = A_1 + B_1$. Comme $A_1 = -\dfrac{1}{4}$ alors $B_1 = -\dfrac{11}{4}$.

Maintenant on prend une valeur particulière de X par exemple $X = 0$ on obtient $\dfrac{1}{-2} = \dfrac{A_1}{-1} + \dfrac{C_1}{2}$ et donc $-\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{C_1}{2}$ d'où $C_1 = -\dfrac{3}{2}$. Par suite

$$f_1(X) = \frac{-3X^2+X+1}{(X-1)(X^2+X+2)} = -\frac{1}{4}\frac{1}{X-1} - \frac{1}{4}\frac{11X+6}{X^2+X+2}.$$

Exercice : Donner une primitive de f_1.

4. Décomposer $f_1(X) = \dfrac{-5X^3+2X^2-8}{X^3(X-1)}$ sur $\mathbb{R}$.

Le théorème de décomposition sur $\mathbb{R}$ nous permet d'écrire :

$$f_1(X) = \frac{A_{1,1}}{X^3} + \frac{A_{1,2}}{X^2} + \frac{A_{1,3}}{X} + \frac{A_2}{X-1}.$$

On remarque que le nombre de coefficients inconnus à trouver est égal au degré du dénominateur.

Le coefficient le plus simple à déterminer est A_2, (par la technique 1) on masque $X - 1$ au dénominateur de f_1 et on remplace X par 1 on obtient $\dfrac{-11}{1} = A_2$.

On peut appliquer cette technique pour calculer $A_{1,1}$ mais regardons de plus près ce qui se passe quand on multiplie f_1 par X^3 :

$$X^3 f_1(X) = \frac{-5X^3+2X^2-8}{(X-1)} = A_{1,1} + A_{1,2}X + A_{1,3}X^2 + X^2 \times X f_2(X),$$

où la fraction $f_2(X) = \dfrac{A_2}{X-1}$ est définie au voisinage de 0. Cette dernière égalité est donc le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de

$$\frac{-5X^3+2X^2-8}{X-1} = \frac{8-2X^2+5X^3}{1-X}$$

Donc on calcule les trois coefficients $A_{1,1}, A_{1,2}$ et $A_{1,3}$ en effectuant un développement limité de $X^3 f_1(X)$ en 0 à l'ordre 2, grâce à l'unicité du développement limité!. On a

$$\frac{8-2X^2+5X^3}{1-X} = (8-2X^2)(1+X+X^2) + X^2\epsilon(X)$$

avec $\epsilon(X)$ tend vers 0 quand X tend vers 0. D'où

$$\frac{8-2X^2+5X^3}{1-X} = 8+8X+6X^2+X^2\epsilon(X),$$

donc $A_{1,1}=8, A_{1,2}=8$ et $A_{1,3}=6$. Par suite

$$f_1(X) = \frac{8}{X^3}+\frac{8}{X^2}+\frac{6}{X}+\frac{-11}{X-1}.$$

Technique 4: *Pour calculer les coefficients $A_1, A_2, \cdots, A_p$ intervenant dans la décomposition d'une fraction rationnelle où a est une racine d'ordre p du dénominateur,*

$$f_1(X) = \frac{R(X)}{(X-a)^p Q_2(X)} = \frac{A_1}{(X-a)^p}+\frac{A_2}{(X-a)^{p-1}}+\cdots+\frac{A_p}{X-a}+\cdots,$$

on peut effectuer le développement limité à l'ordre $p-1$ au voisinage de a de la fonction $(X-a)^p f_2(X) = \dfrac{R(X)}{Q_2(X)}$ et on a

$$(X-a)^p f_2(X) = \frac{R(X)}{Q_2(X)} = A_1 + A_2(X-a)+\cdots+A_p(X-a)^{p-1}+(X-a)^{p-1}\epsilon(X)$$

avec $\epsilon(X)\to 0$ quand $X\to a$. .

5. Décomposer $f_1(X) = \dfrac{X^2+2X-1}{X(X-1)(X^2+1)}$ sur $\mathbb{R}$.

Comme X^2+1 est irréductible sur $\mathbb{R}$, le théorème de décomposition sur $\mathbb{R}$ nous permet d'écrire :

$$f_1(X) = \frac{A_1}{X}+\frac{A_2}{X-1}+\frac{B_1X+C_1}{X^2+1}.$$

Par la technique 1, on a

$$A_1 = \frac{X^3+2X^2-1}{(X-1)(X^2+1)}\Big|_{X=0} = 1$$

et

$$A_2 = \frac{X^3+2X^2-1}{X(X^2+1)}\Big|_{X=1} = \frac{2}{2} = 1.$$

Pour Calculer B_1 et C_1, on multiplie f_1 par (X^2+1) on obtient

$$(X^2+1)f_1(X) = \frac{X^2+2X-1}{X(X-1)} = B_1X+C_1+(X^2+1)\left(\frac{A_1}{X}+\frac{A_2}{X-1}\right).$$

Maintenant on remplace X par l'une des deux racines complexes de X^2+1 et en utilisant le fait que B_1 et C_1 sont des réels, on identifie. Prenant $X = i$ on a

$$B_1 i + C_1 = \frac{-1+2i-1}{i(i-1)} = \frac{-2+2i}{-1-i} = 2\frac{1-i}{1+i} = -2i$$

donc $B_1 = -2$ et $C_1 = 0$. Finalement

$$f_1(X) = \frac{1}{X} + \frac{1}{X-1} + \frac{-2X}{X^2+1}.$$

Question : Donner une primitive de f_1.

Technique 5: *Si le dénominateur d'une fraction rationnelle est divisible par un polynôme $Q_2(X) = X^2 + b_1x + c_1$, irréductible sur $\mathbb{R}$ de degré 2, et n'est pas divisible par Q_2^2 :*

$$f_1(X) = \frac{B_1X + C_1}{X^2 + b_1x + c_1} + \cdots \quad \text{avec} \quad b_1^2 - 4c_1 < 0.$$

Alors on multiplie par Q_2 puis on remplace X par l'une des deux racines de Q_2 dans Q_2f_1 et on identifie.

5.4 Primitive ou intégrale d'une fraction en e^t, $\operatorname{ch} t$, $\operatorname{sh} t$

Pour déterminer les primitives des fonctions de la forme $f(e^t)$ (fraction rationnelle en e^t) : on effectue le changement de variable $u = e^t$ et on est ramené à intégrer une fraction rationnelle (sans oublier que $dt = \dfrac{du}{u}$!).

Exemple : Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\operatorname{ch}(t)}$. On pose $u = e^t$, on a $du = e^t dt$ et $t = 0 \to u = 1$, $t = 1 \to u = e$, donc

$$\int_0^1 \frac{dt}{\operatorname{ch}(t)} = \int_1^e \frac{2}{u + \frac{1}{u}} \frac{du}{u} = 2\int_1^e \frac{1}{u^2+1}\, du = 2(\operatorname{Arctan} e - \operatorname{Arctan} 1) = 2\operatorname{Arctan} e - \frac{\pi}{2}.$$

Question : Calculer $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{dt}{5\operatorname{sh}(t) - 4\operatorname{ch}(t)}$.

5.5 Primitive ou intégrale d'une fraction trigonométrique

Ce sont des fonctions de la forme $f(\sin t, \cos t)$ où f est une fraction rationnelle sur $\mathbb{R}$ et la variable est $\sin t, \cos t$.
Pour intégrer ces fonctions, en général, on fait le changement de variable classique $u = \operatorname{tg}(\dfrac{t}{2})$ et il faut utiliser les formules suivantes :

$$\cos t = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad \sin t = \frac{2u}{1+u^2} \quad \text{et} \quad dt = \frac{2du}{1+u^2}.$$

En général, ce changement de variable augmente le degré des dénominateurs. Dans certains cas, d'autres changements de variables sont préférables suivant les propriétés de f.

- Si $f(\sin(-t), \cos(-t)) = -f(\sin t, \cos t)$, donc $f(\sin t, \cos t) = S(\cos t)\sin t$. On pose $u = \cos t$.

- Si $f(\sin(\pi - t), \cos(\pi - t)) = -f(\sin t, \cos t)$, donc $f(\sin t, \cos t) = S(\sin t)\cos t$. On pose $u = \sin t$.

- Si $f(\sin(\pi + t), \cos(\pi + t)) = f(\sin t, \cos t)$, donc $f(\sin t, \cos t) = S(\operatorname{tg} t)$. On pose $u = \operatorname{tg} t$.

Exercice : Calculer $\displaystyle\int \frac{1}{\cos t}\,dt$ et $\displaystyle\int \frac{1}{\sin t}\,dt$.

5.6 Autres sortes de fractions rationnelles

1. $f(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$ fraction rationnelle en x et $\sqrt{ax^2 + bx + c}$

   On écrit : $ax^2 + bx + c = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 + \dfrac{4ac - b^2}{4a}$.

   A l'aide du changement de variable $u = x + \dfrac{b}{2a}$, notre fraction est de la forme $S(u, \sqrt{\alpha u^2 + \beta})$.

   Le cas $\alpha < 0$ et $\beta < 0$ est impossible. Il nous reste trois expressions possibles :

   $T(v, \sqrt{v^2 + 1})$ ou $T(v, \sqrt{v^2 - 1})$ ou $T(v, \sqrt{1 - v^2})$

   - $T(v, \sqrt{v^2 + 1})$. On pose $w = \sqrt{v^2 + 1} \Rightarrow w^2 - v^2 = 1$. Le couple (v, w) appartient à une hyperbole équilatère, d'asymptotes $v = w$ et $v = -w$. On pose $w = \operatorname{ch} t$ et $v = \operatorname{sh} t$.
   - $T(v, \sqrt{v^2 - 1})$. On pose $w = \sqrt{v^2 - 1} \Rightarrow v^2 - w^2 = 1$. On pose $v = \operatorname{ch} t$ et $w = \operatorname{sh} t$.
   - $T(v, \sqrt{1 - v^2})$. On pose $w = \sqrt{1 - v^2} \Rightarrow v^2 + w^2 = 1$. Le couple (v, w) est sur le cercle unité. On pose $v = \cos t$ et $w = \sin t$.

2. $f\left(x, \sqrt{\dfrac{ax + b}{cx + d}}\right)$ fraction rationnelle en x et $\sqrt{\dfrac{ax + b}{cx + d}}$

   On pose $t = \sqrt{\dfrac{ax + b}{cx + d}}$. Alors $t^2 = \dfrac{ax + b}{cx + d} \Leftrightarrow x = \dfrac{b - dt^2}{ct^2 - a}$ avec $t \geq 0$.

6 Fonctions définies par une intégrale

Il est fréquent de devoir étudier une fonction $F(x) = \displaystyle\int_{a(x)}^{b(x)} f(u)\,du$ où f est une fonction dont on ne sait pas calculer de primitive. Nous allons étudier sur deux exemples la marche à suivre.

6.1 Exemple 1

Soit la fonction $F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt$.

Domaine de définition : La fonction $f : t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc F est définie sur $\mathbb{R}$. La fonction F est primitive de f qui s'annule en 0.

Parité : La fonction f est paire, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F(-x) = \int_0^{-x} e^{-t^2}\, dt = \int_0^x e^{-(-u)^2}\,(-du) = -\int_0^x e^{-u^2}\, du = -F(x).$$

Ici on a fait le changement de variable $u = -t$. D'où la fonction F est impaire. Il suffit donc d'étudier F sur $\mathbb{R}_+$.

Dérivabilité : La fonction F est la primitive de f. Donc $F'(x) = f(x) = e^{-x^2} > 0$ ce qui implique que F est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

Comportement de F à l'infini : On prouve que

$$\int_1^x e^{-t^2}\, dt \le \int_1^x e^{-t}\, dt \quad \text{pour tout} \quad x \ge 1.$$

En utilisant la relation de Chasles et la dernière inégalité, on majore $F(x)$ pour tout $x \ge 1$. En effet : pour tout $x \ge 1$ on a

$$F(x) = \int_0^1 e^{-t^2}\, dt + \int_1^x e^{-t^2}\, dt \le \int_0^1 e^{-t^2}\, dt + \int_1^x e^{-t}\, dt$$

$$\le \int_0^1 e^{-t^2}\, dt + [-e^{-t}]_1^x = \int_0^1 e^{-t^2}\, dt - e^{-x} + e^{-1} \le \int_0^1 e^{-t^2}\, dt + e^{-1}.$$

La fonction F est croissante sur $[1, +\infty[$, majorée par le nombre $\int_0^1 e^{-t^2}\, dt + e^{-1}$ donc elle admet une limite en $+\infty$ qu'on note L. ($L = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$!).

Questions :

1. En déduire le tableau de variation de F.
2. Tracer la courbe de F.

6.2 Exemple 2

Soit la fonction $F(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\ln t}$.

Domaine de définition : L'intégrale existe lorsque la fonction $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ est définie continue sur l'intervalle d'extémités x et $2x$, ce qui signifie que cet intervalle doit être inclus dans $]0, 1[$ ou dans $]1, +\infty[$. Ceci a lieu lorsque $0 < x < \frac{1}{2}$ ou $x > 1$. Le domaine de définition est donc $D_F =]0, \frac{1}{2}[\cup]1, +\infty[$.

Sens de variation : Si la fonction G est une primitive de $f(t) = \frac{dt}{\ln t}$ sur chacun des intervalles du domaine de définition ci-dessus, nous avons $F(x) = G(2x) - G(x)$, la fonction

F est donc dérivable sur son domaine de définition avec $F'(x) = 2G'(2x) - G'(x)$, Donc

$$F'(x) = \frac{2}{\ln 2x} - \frac{1}{\ln x} = \frac{\ln x - \ln 2}{\ln 2x \ln x}.$$

On a $F'(2) = 0$. D'autre part F' est négative sur $]0, 2[\cap D_F =]0, \frac{1}{2}[\cup]1, 2[$ et positive sur $]2, +\infty[$.

Donc F est décroissante sur $]0, \frac{1}{2}[$, elle est aussi décroissante sur $]1, 2[$ et elle est croissante sur $]2, +\infty[$.

Étude en $+\infty$ *:* On regarde le comportement de F en $+\infty$, on peut supposer donc que $x > 1$. Sur l'intervalle $[x, 2x] \subset]1, +\infty[$ nous avons

$$0 < \ln x \leq \ln t \leq \ln 2x$$

donc

$$0 < \frac{1}{\ln 2x} \leq \frac{1}{\ln t} \leq \frac{1}{\ln x}$$

d'où

$$0 < \frac{x}{\ln 2x} \leq F(x) \leq \frac{x}{\ln x}, \quad \text{pour tout} \quad x > 1.$$

Par le théorème des croissances comparées, on a $\lim\limits_{+\infty} F = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x} = 0$.
La courbe de F présente une branche parabolique horizontale.

Étude en 0^+ *:* Près de 0^+, on montre le même encadrement c'est à dire :

$$\frac{x}{\ln 2x} \leq F(x) \leq \frac{x}{\ln x} < 0, \quad \text{pour tout} \quad 0 < x < \frac{1}{2}.$$

On en déduit que :
- $\lim\limits_{0^+} F = 0$, on peut donc prolonger F par continuité en 0 en posant $F(0) = 0$.
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{F(x)}{x} = 0$, donc la fonction F présente une demi-tangente horizontale à l'origine.

Étude en 1^+ *:* En étudiant la fonction $t \mapsto \ln t - t + 1$ sur $]1, +\infty[$, on montre que $0 \leq \ln t \leq t - 1$, donc $f(t) > \frac{1}{t-1} > 0$, pour tout $t \in]1, +\infty[$.

En intégrant la dernière inégalité, on obtient $F(x) > \int_x^{2x} \frac{dt}{t-1} = \ln \frac{2x-1}{x-1}$ sur $]1, +\infty[$, ce qui implique $\lim\limits_{1^+} F = +\infty$. La droite $x = 1$ est une asymptote verticale à la courbe de F.

Étude en $\frac{1}{2}^-$ *:* On étudie le comportement de F en $\frac{1}{2}^-$, on va donc prendre $x \in]\frac{1}{4}, \frac{1}{2}[$ soit $2x \in]\frac{1}{2}, 1[$.

L'étude de la différence $\ln s - 2(s-1)$ pour $s \in]\frac{1}{2}, 1[$ montre que $\ln s > 2(s-1)$ pour tout $s \in]\frac{1}{2}, 1[$ ce qui nous permet d'écrire

$$F(x) = \int_x^{\frac{1}{2}} f(t)\, dt + \int_{\frac{1}{2}}^{2x} f(t)\, dt < \int_{\frac{1}{2}}^{2x} \frac{dt}{2(t-1)}\, dt$$

car la première intégrale est négative. Par suite $F(x) < \frac{1}{2}\ln 2(1-2x)$ le membre de droite tend vers $-\infty$ dès que x tend vers $\frac{1}{2}^-$. D'où $\lim_{x\to(\frac{1}{2})^-} F(x) = -\infty$. La droite $x = \frac{1}{2}$ est une asymptote verticale à la courbe de F.

Remarque : On peut retrouver les limites de F en $+\infty$, et en 0 en utilisant la formule de la moyenne.

Question :

1. Donner le tableau de variation de F.
2. Tracer la courbe de F.

7 Méthodes numériques de calcul d'intégrales

7.1 Exemple

On cherche une valeur approchée de $\ln 2 = \int_1^2 \frac{dt}{t}$

I. Méthode des rectangles

On partage l'intervalle $[1, 2]$ en 10 parties égales. Calculer u_{10} et v_{10}. (5 chiffres après la virgule)

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On pose $h = \frac{b-a}{n}$. Pour $i = 0, \cdots, n$, soient $x_i = a + ih$, A_i le point de coordonnées $(x_i, 0)$ et M_i le point de coordonnées $(x_i, f(x_i))$.

II. Méthode des trapèzes

On assimile le graphe de f à une ligne brisée.

1. Calculer l'aire du trapèze $A_i, A_{i+1}, M_{i+1}, M_i$.
2. Calculer $\ln 2$ en prenant pour valeur approchée la somme des aires de ces 10 trapèzes avec $a = 1$, $b = 2$, $n = 10$. (5 chiffres après la virgule)

III. Méthode des paraboles ou de Simpson.

On assimile le graphe de f à des arcs de paraboles mis bout à bout. Dans ce cas, n doit être pair.

On considère le trapèze curviligne déterminé par les 3 segments de droites A_iA_{i+1}, A_iM_i, $A_{i+2}M_{i+2}$ et l'arc de parabole $y = ax^2 + bx + c$ passant par M_i, M_{i+1} et M_{i+2}.

1. En plaçant le centre des coordonnées en A_{i+1}, montrer que l'aire de ce trapèze curviligne est $\frac{h}{3}(f(x_i) + 4f(x_{i+1}) + f(x_{i+2}))$.
2. Calculer $\ln 2$ en prenant pour valeur approchée la somme des aires de ces 5 trapèzes curvilignes avec $a = 1$, $b = 2$, $n = 10$. (5 chiffres après la virgule).

À la septième décimale près, $\ln 2 = 0,6931472$. Conclusion.

8 Exercices

Exercice 1 En interprétant u_n comme une somme de Riemann d'une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, calculer la limite (si elle existe) de la suite $(u_n)_n$ dans les cas suivants :

a) $u_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{n+n}$.
b) $u_n = \dfrac{1}{n^{\alpha+1}} + \dfrac{2^\alpha}{n^{\alpha+1}} + \cdots + \dfrac{n^\alpha}{n^{\alpha+1}}$.
c) $u_n = \dfrac{n}{n^2+1} + \dfrac{n}{n^2+4} + \cdots + \dfrac{n}{n^2+n^2}$.
d) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{np} \frac{1}{n+k}$.
e) $u_n = \dfrac{\pi}{2n}\Big(\sin\dfrac{\pi}{2n} + \sin\dfrac{2\pi}{2n} + \cdots + \sin\dfrac{n\pi}{2n}\Big)$.
f) $u_n = \dfrac{1}{n}\sqrt[n]{\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(n+k)}$.

Exercice 2
1. Tracer, dans un repère orthonormé, la courbe représentative Γ de la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x) = e^{-x^2}$.
2. En utilisant la méthode des rectangles pour une subdivision de l'intervalle $[0,1]$ en 5 intervalles de même longueur, déterminer un encadrement de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$.

Exercice 3 Montrer que $\dfrac{1}{2} \le \dfrac{1}{1+x^2} \le 1$ pour tout $x \in [0,1]$.

En déduire l'inégalité suivante : $\dfrac{1}{2(n+1)} \le \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,dx \le \frac{1}{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

puis calculer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,dx$.

Exercice 4
1. Soit la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = |x^3 + x^2 - 2x|$. Calculer la valeur moyenne de f sur $[-3,2]$.
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = a\sin(wt+\varphi)$ où a et w sont deux réels strictement positifs et φ un réel quelconque.
Calculer la moyenne de f entre 0 et $\dfrac{2\pi}{w}$.

Exercice 5 Montrer que la valeur moyenne d'une fonction affine f sur un intervalle $[a,b]$ est égale à $f\big(\dfrac{a+b}{2}\big)$.

Exercice 6 Utiliser la formule de la moyenne pour :

1) Étudier la suite (u_n) de terme général $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\sin^n t}{1+t}\,dt$.

2) Étudier les limites de la fonction $F(x) = \displaystyle\int_x^{3x} \frac{dt}{\ln t}$ quand $x \to 0$ et quand $x \to \infty$.

Exercice 7 Soit f la fonction définie par $f(t) = \dfrac{\cos t - 1}{t}$.

1) Montrer qu'on peut prolonger f par continuité en 0.
   On note encore par f ce prolongement.
2) En utilisant la formule de la moyenne, calculer $\displaystyle\lim_{a\to 0} \int_a^{3a} f(t)\,dt$.
3) En déduire l'existence et la valeur de $\displaystyle\lim_{a\to 0} \int_a^{3a} \frac{\cos t}{t}\,dt$

Exercice 8 On note (x) la distance de x à l'entier le plus proche et par $[x]$ la partie entière de x. Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 (t)dt \quad \text{et} \quad \int_0^1 t[3t]dt.$$

Exercice 9 Pour quelles valeurs de α a-t-on :

a) $\displaystyle\int_0^1 t^5 - \alpha t^2\,dt = 0.$

b) $\displaystyle\int_0^1 t^4 + \alpha^2\,dt = 0.$

Exercice 10 Soit f une fonction continue, calculer les dérivées par rapport à x de :

$$\int_x^b f(t)dt, \quad \int_0^{x^2} f(t)dt \quad \text{et} \quad \int_x^{2x} f(t)dt$$

Exercice 11 Déterminer les ensembles de définition et calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$\int_1^x e^t \ln t\,dt \quad \text{et} \quad \int_1^{x^2+1} e^t \ln t\,dt$$

Exercice 12 Calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^1 (t^2 - t + 1)dt$	2) $\displaystyle\int_0^1 (t^3 + 3t^4)dt$	3) $\displaystyle\int_5^6 x^3 dx$
4) $\displaystyle\int_{-1}^1 (t^3 - t)dt$	5) $\displaystyle\int_{-2}^2 (t^4 - 2t^2)dt$	6) $\displaystyle\int_0^1 t^{\frac{1}{2}} dt$
7) $\displaystyle\int_1^8 t^{\frac{1}{3}} dt$	8) $\displaystyle\int_1^{10} u^{-2} du$	9) $\displaystyle\int_1^2 (1+s)^{-3} ds$

Exercice 13 Calculer des primitives des fonctions suivantes en utilisant une intégration par parties, répétée si nécessaire :

1) $\dfrac{x}{(1+x)^3}$	2) $\dfrac{x^3}{(4-x^2)^3}$
3) $\dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}$	4) $\dfrac{x}{\sqrt{5+x}}$

Exercice 14 Pour tout entier naturel n on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 (x^2-1)^n\, dx$.

1. À l'aide d'une intégration par parties, établir que, pour $n \geq 1$, $I_n = -\dfrac{2n}{2n+1} I_{n-1}$.
2. En déduire la valeur de I_n.

Exercice 15 Calculer des primitives des fonctions suivantes :

1) $x \ln x$	2) $(\ln x)^2$	3) $x(\ln x)^2$
4) $\dfrac{\ln x}{x^2}$	5) xe^x	6) e^{2x}
7) $(e^x+1)^2 e^x$	8) $(e^x+e^{-x})^2$	9) $x^2 e^{-x}$
10) xe^{x^2}	11) $x^3 e^{-x^2}$	

Exercice 16 Soit $x > 0$. On définit les intégrales $F(x)$ et $G(x)$ par :

$$F(x) = \int_1^x \cos(\ln t)\, dt \quad \text{et} \quad G(x) = \int_1^x \sin(\ln t)\, dt$$

En utilisant des intégrations par parties, prouver que $F(x) = x\cos(\ln x) - 1 + G(x)$ et $G(x) = x \sin(\ln x) - F(x)$. En déduire les expressions de $F(x)$ et $G(x)$.

Exercice 17

1. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ Montrer que si une fonction continue f est paire sur $[-a, a]$ alors la fonction définie par $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt$ est impaire.
2. Démontrer un résultat analogue lorsque la fonction f est impaire.
3. Soit g une fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue et $2\pi-$ périodique. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $G(x) = \displaystyle\int_x^{x+2\pi} g(t)\, dt$. Montrer que G est bien définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer sa dérivée.
En déduire que G est une fonction constante sur $\mathbb{R}$..
Sous quelle condition la fonction $H : x \mapsto \displaystyle\int_0^x g(t)\, dt$ est-elle 2π périodique ?

Exercice 18 Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$.

1. Montrer, en utilisant le changement de variable $x = \pi - t$ que l'on a :

$$\int_0^\pi x f(\sin x)\, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x)\, dx.$$

2. En déduire le calcul de $I = \displaystyle\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\, dx$.

Exercice 19 Décomposer sur $\mathbb{R}$ les fractions rationnelles suivantes et en déduire pour chacune une primitive sur un intervalle où elle est définie :

$$R_1(x) = \frac{x^3}{x^2+1}, \quad R_2(x) = \frac{2}{x^4-1}, \quad R_3(x) = \frac{2x-1}{x^3+1}$$

$$A(x) = \frac{x^4-3}{x^2+2x+1}, \quad B(x) = \frac{x^2+2}{(x+1)^2(x^2-x-2)} \quad \text{et } C(x) = \frac{x}{x^3-x^2+x-1}$$

Exercice 20 Décomposer sur $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle

$$\frac{9}{(x-1)^3(x^2+x+1)^2}.$$

En déduire $\displaystyle\int \frac{9}{(x-1)^3(x^2+x+1)^2}\,dx$.

Exercice 21

1) A l'aide du changement de variable $x = \sin\theta$, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$.

Soit $a > 0$, déterminer les primitives sur $[-a, a]$ de la fonction $x \mapsto \sqrt{a^2-x^2}$.

2) A l'aide du changement de variable $x = \operatorname{ch}\theta$, déterminer les primitives sur $[1, +\infty[$ de la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2-1}$.

3) Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$.

4) Déterminer les primitives de la fonction $x \mapsto \operatorname{Arcsin} x$ sur l'intervalle $]-1, 1[$ puis sur l'intervalle $[-1, 1]$.

5) Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction $x \mapsto e^{-\sqrt{x}}$.

6) Calculer $\displaystyle\int_0^1 \arctan \sqrt[3]{x}\,dx$

Exercice 22 Calculer les primitives suivantes :

1) $\displaystyle\int \frac{x^3}{(1+x^2)^3}\,dx$	2) $\displaystyle\int \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 dx$	3) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$
4) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(1-x^3)^2}\,dx$	5) $\displaystyle\int x(1+x)^{\frac{1}{2}}dx$	6) $\displaystyle\int x^2(1-x^3)^{\frac{1}{3}}dx$
7) $\displaystyle\int \frac{x^5}{(1+x^6)^2}\,dx$	8) $\displaystyle\int \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx$	9) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(1+x^3)^4}\,dx$

Exercice 23 Calculer les intégrales définies suivantes :

1) $\displaystyle\int_1^2 x^2 \ln x dx$ 2) $\displaystyle\int_1^e (\ln x)^3 dx$ 3) $\displaystyle\int_2^e \frac{dx}{(x\ln x)^3}$
4) $\displaystyle\int_1^{1000} \frac{\ln x}{x^2}\, dx$ 5) $\displaystyle\int_0^1 xe^x dx$ 6) $\displaystyle\int_0^4 e^{-2x} dx$
7) $\displaystyle\int_1^1 (e^x - e^{-x}) dx$ 8) $\displaystyle\int_0^{10} xe^{-x^2} dx$ 9) $\displaystyle\int_0^3 x^3 e^{-x} dx$
10) $\displaystyle\int_0^1 (1-x)^{\frac{1}{2}} dx$ 11) $\displaystyle\int_0^1 x(1-x)^{\frac{1}{2}} dx$ 12) $\displaystyle\int_{-1}^1 x(1+x^2)^{\frac{1}{2}} dx$
13) $\displaystyle\int_5^6 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$ 14) $\displaystyle\int_0^1 x(1+x^2)^{\frac{1}{2}} dx$ 15) $\displaystyle\int_0^3 \frac{x^5 dx}{\sqrt{1+x^6}}$
16) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x^3}}$ 17) $\displaystyle\int_{-1}^1 x^2(1-x^3)^{\frac{1}{3}} dx$ 18) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2-1}{\sqrt{x}}\, dx$
19) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{x+2}}$ 20) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^5 dx}{(7+x^3)^{\frac{1}{3}}}$

Exercice 24 Trouver le meilleur changement de variables pour calculer le plus commodément possible :
1) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin t}\, dt$ 2) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sin t - \cos t}\, dt$ 3) $\displaystyle\int \frac{1}{4-5\sin t}\, dt$
4) $\displaystyle\int \frac{1}{5-3\cos t}\, dt$ 5) $\displaystyle\int \frac{1}{\tan^2 t}\, dt$ 6) $\displaystyle\int \frac{1}{2-\sin^2 t}\, dt$
7) $\displaystyle\int \frac{\sin^2 t}{1+5\cos^2 t}\, dt$ 8) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 t + \tan^2 t}\, dt$

Exercice 25 A l'aide du changement de variable $\cos x = t$ calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x + \sin 2x}\, dx.$

Exercice 26 A l'aide du changement de variable $\operatorname{tg} \dfrac{x}{2} = t$, déterminer les primitives de la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x}{1+\sin x}$ sur l'intervalle $]-\dfrac{\pi}{2}, \pi[$.

Exercice 27 L'objet est de déterminer une primitive de $f : x \longmapsto f(x) = \dfrac{1}{1+\sin^2 x}$ sur $]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}[$.

1. (a) Soit a un réel strictement positif; déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ des fonctions $f_a : x \mapsto \dfrac{1}{ax^2+1}$.
   (b) Sans les calculer, montrer que la fonction $f : x \longmapsto f(x) = \dfrac{1}{1+\sin^2 x}$, $x \in \mathbb{R}$, admet des primitives sur $\mathbb{R}$.
   (c) A l'aide du changement de variable $\operatorname{tg} x = t$, déterminer les primitives de f sur $]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$.

2. (a) A l'aide de la question 1.c déterminer les primitives de f sur $]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$.
   (b) En utilisant les résultats précédents, déterminer une primitive de f sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$.

Exercice 28 Soit F la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t}\, dt$.
On note par Γ sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormal.

1) Étudier le sens de variation de F.
2) Étudier le signe de $f(x) = F(x) - \ln x$. En déduire $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.