

# Chapitre 6

## Fonctions numériques usuelles

Les fonctions que nous étudions dans ce chapitre sont des fonctions de « référence », avec lesquelles on en construit une multitude d'autres.

On attend des étudiants qu'ils connaissent sans hésitation leurs principales propriétés (définition, variations, limites, dérivées ...) et leurs graphes.

Beaucoup de ces propriétés sont connues depuis le secondaire. On s'attache ici, chaque fois que c'est possible, à montrer de manière rigoureuse les propriétés les plus importantes. En revanche beaucoup de « petites » propriétés élémentaires seront signalées sans démonstration : il revient au lecteur la tâche de les vérifier.

### 1 Fonctions $y = x^r$ ( $r \in \mathbb{Q}$ )

On notera dans cette section  $P_r$  la fonction définie par  $P_r(x) = x^r$  (que  $r$  soit entier positif ou négatif, ou rationnel non entier).

#### 1.1 Cas où $r \in \mathbb{N}$

Si  $n$  est un entier strictement positif,  $P_n(x) = x^n$  est le produit de  $n$  facteurs tous égaux à  $x$ . Rappelons les propriétés bien connues des  $P_n$ , toutes élémentaires :

- $P_n$  est définie sur  $\mathbb{R}$  tout entier, continue et dérivable. Sa dérivée est  $P'_n(x) = nx^{n-1}$ .
- $P_n(0) = 0$ ,  $P_n(1) = 1$ .
- Si  $n$  est pair,  $P_n$  est une fonction paire, décroissante de  $+\infty$  à 0 sur  $] -\infty, 0]$  et croissante de 0 à  $+\infty$  sur  $[0, +\infty[$ . On a donc  $P_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+$ .
- Si  $n$  est impair, la fonction  $P_n$  est impaire, strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  de  $-\infty$  à  $+\infty$ . C'est une bijection de  $\mathbb{R}$  sur lui même.

**Positions respectives des graphes de  $P_n$  et  $P_m$  sur  $\mathbb{R}^+$  :** Soient  $m$  et  $n$  deux entiers positifs, avec par exemple  $m < n$ . Alors :

- Pour  $x \in ]0, 1[$ ,  $x^m > x^n$ .
- Les valeurs de  $P_n(x)$  et  $P_m(x)$  coïncident pour  $x = 0$  et  $x = 1$ .
- Pour  $x > 1$ ,  $x^m < x^n$ .

On convient que  $P_0(x)$  est la fonction constante de valeur 1.

**Exercice** Tracer sur un même schéma l'allure des graphes de  $P_n$  pour  $n$  de 1 à 5. A quoi ressemblent les graphes de  $P_{2004}$  et  $P_{2005}$  ?

### 1.2 Cas où $r$ est un entier négatif

Pour  $n$  entier négatif, et  $x \neq 0$ , on pose  $x^n = \frac{1}{x^{-n}}$ .

$P_n$  est alors définie sur  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Elle est continue et dérivable sur son domaine, sa dérivée s'écrit encore  $P'_n(x) = nx^{n-1}$ . Par exemple  $P_{-1}'(x) = (-1)x^{-1-1} = -x^{-2}$ .

- Quand  $x \rightarrow \pm\infty$ , on a  $P_n(x) \rightarrow 0$ .
- Si  $n$  est pair,  $P_n$  est paire. Elle croît de 0 à  $+\infty$  pour  $x \in ]-\infty, 0[$ , et décroît de  $+\infty$  à 0 pour  $x \in ]0, +\infty[$ .
- Si  $n$  est impair,  $P_n$  est impaire. Elle décroît de 0 à  $-\infty$  pour  $x \in ]-\infty, 0[$ , et décroît de  $+\infty$  à 0 pour  $x \in ]0, +\infty[$ . Attention, elle n'est pas décroissante sur  $\mathbb{R}^*$  !

**Exercice** Tracer sur un même schéma l'allure des graphes de  $y = \frac{1}{x^n}$  pour  $n$  de 1 à 4.

### 1.3 Cas où $r \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$

#### Racine $n$ -ième

On a vu que si  $n$  est un entier impair et positif,  $P_n$  est une bijection continue croissante de  $\mathbb{R}$  sur lui-même. Elle admet donc une fonction réciproque, qui est également une bijection continue croissante de  $\mathbb{R}$  sur lui-même. On note cette fonction réciproque

$$R_n(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}.$$

On a vu au chapitre précédent qu'on a  $R'_n(x) = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$ . L'exposant est ici négatif, et la dérivée n'existe que pour  $x \neq 0$ . En 0,  $R_n$  est continue, mais non dérivable. Cela se traduit dans ce cas par le fait que le graphe de  $R_n$  possède en 0 une tangente verticale.

Si  $n$  est un entier positif pair, la fonction  $P_n$  n'est pas bijective sur  $\mathbb{R}$ , mais si on la restreint à  $\mathbb{R}^+$  on obtient une bijection croissante continue de  $\mathbb{R}^+$  sur lui-même. Il existe donc une fonction réciproque définie sur  $\mathbb{R}^+$ , notée de même  $R_n(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ .

En 0,  $R_n$  est continue à droite, car  $R_n(x) \rightarrow 0$  quand  $x \rightarrow 0^+$ . Mais elle n'est pas dérivable

à droite en 0, car  $\frac{R_n(x)}{x} \rightarrow +\infty$  quand  $x \rightarrow 0^+$ .

Dans tous les cas, on a  $\frac{R_n(x)}{x} \rightarrow 0$  quand  $x \rightarrow +\infty$ , ce qui se traduit par le fait que le graphe possède une direction asymptotique horizontale quand  $x \rightarrow +\infty$ . C'est également le cas pour  $x \rightarrow -\infty$  quand  $n$  est impair.

**Exercice** Tracer sur un même schéma l'allure des graphes de  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = \sqrt[3]{x}$  et  $y = \sqrt[4]{x}$ . A quoi ressemblent les graphes de  $y = x^{1/1917}$  et  $y = x^{1/1918}$  ?

**Exposant rationnel quelconque**

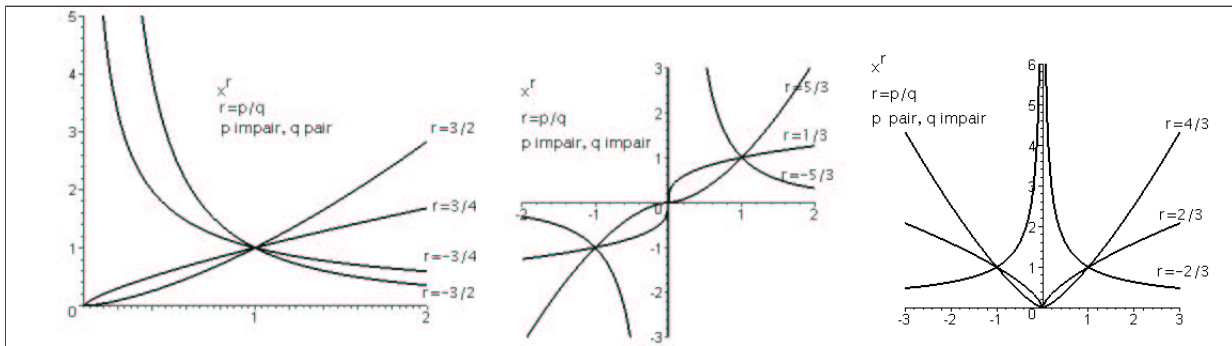
Si  $r$  est un rationnel quelconque, il peut se mettre sous la forme  $r = \frac{p}{q}$  où  $p \in \mathbb{Z}$  et  $q \in \mathbb{N}^*$ .

On définit alors  $x^r = (x^p)^{\frac{1}{q}}$ .

**Exercice** Vérifiez que cela ne dépend pas du choix de  $\frac{p}{q}$  parmi les fractions équivalentes égales à  $r$ . Vérifiez aussi qu'on peut définir, de manière équivalente,  $x^r = (x^{\frac{1}{q}})^p$ .

Supposons qu'on choisisse  $p$  et  $q$  de façon que la fraction soit irréductible. Alors :

- Si  $q$  est pair,  $P_r$  est défini seulement sur  $\mathbb{R}^+$  quand  $r > 0$ , sur  $\mathbb{R}^{+*}$  quand  $r < 0$ .
- Si  $q$  est impair,  $P_r$  est défini sur  $\mathbb{R}$  quand  $r \geq 0$ , sur  $\mathbb{R}^*$  quand  $r < 0$ . La fonction  $P_r$  est alors paire ou impaire, suivant que  $p$  est un nombre pair ou impair.



On retiendra les égalités suivantes, vraies chaque fois qu'elles sont définies ( $a$  et  $b$  désignent des rationnels) :

$$\begin{aligned} x^a x^b &= x^{a+b} \\ x^a / x^b &= x^{a-b} \\ (x^a)^b &= x^{ab} \\ (x^a)' &= ax^{a-1}. \end{aligned}$$

Ces formules ne font qu'étendre aux exposants rationnels les propriétés déjà connues pour les exposants entiers.

La dernière formule (dérivation de  $x^a$ ) a été démontrée dans le chapitre précédent. La fonction  $P_a$  n'est dérivable en 0 (ou dérivable à droite en 0, suivant le cas) que si  $a \geq 1$ .

**Exercice** Tracer sur un même schéma l'allure des graphes de  $y = x^{3/2}$ ,  $y = x^{2/3}$  et sur un autre schéma, ceux de  $y = x^{3/5}$  et  $y = x^{5/3}$ .

## 2 Logarithmes

### 2.1 Logarithme népérien

La fonction  $f(x) = \frac{1}{x}$  est continue sur  $]0, +\infty[$ . Nous admettrons provisoirement (cela sera démontré dans quelques chapitres) que cela suffit pour affirmer l'existence d'une unique

fonction dérivable  $F$  telle que  $F'(x) = f(x)$  et  $F(1) = 0$ . On dit que c'est une **primitive** de la fonction  $f$ . Cette fonction est appelée **logarithme népérien**<sup>1</sup> et on la note  $\ln x$  ou encore parfois  $\text{Log } x$ . On peut encore écrire

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt.$$

On a donc, par définition, les propriétés :  $\ln x$  est défini pour  $x > 0$ , la fonction  $\ln$  est dérivable avec  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ , et enfin  $\ln 1 = 0$ .

Comme sa dérivée est strictement positive, elle est strictement croissante. On en déduit que  $\ln x < 0$  pour  $x \in ]0, 1[$  et  $\ln x > 0$  pour  $x > 1$ .

### Logarithme d'un produit

**Proposition 2.1.1** *Si  $a, b$  sont des réels positifs, on a*

$$\boxed{\ln(ab) = \ln a + \ln b.}$$

**Preuve** Considérons la fonction  $f(x) = \ln(ax)$ . Par la règle de dérivation des fonctions composées, on a

$$f'(x) = a \cdot \frac{1}{ax} = \frac{1}{x}.$$

Comme les fonctions  $f$  et  $\ln$  ont même dérivée, elle ne diffèrent que d'une constante  $C$ , c'est à dire que pour tout  $x > 0$ ,  $f(x) = \ln x + C$ . En faisant  $x = 1$ , on trouve que  $C = f(1) = \ln a$ , donc pour tout  $x > 0$  on a  $f(x) = \ln(ax) = \ln a + \ln x$ .

On obtient évidemment la proposition en faisant  $x = b$ . □

On en déduit aisément les formules suivantes (où  $a$  et  $b$  désignent des réels positifs) :

$$\boxed{\begin{aligned} \ln(1/a) &= -\ln a, \\ \ln(a/b) &= \ln a - \ln b, \\ \ln(a^r) &= r \ln a \quad (r \in \mathbb{Q}). \end{aligned}}$$

**Proposition 2.1.2** *La fonction  $\ln$  est une bijection continue croissante de  $\mathbb{R}^{+*}$  sur  $\mathbb{R}$ . Notamment,  $\ln x \rightarrow -\infty$  quand  $x \xrightarrow{>} 0$  et  $\ln x \rightarrow +\infty$  quand  $x \rightarrow +\infty$ .*

**Preuve** Examinons d'abord la limite de  $\ln x$  quand  $x \rightarrow +\infty$  :

Remarquons que d'après les formules ci-dessus, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\ln(2^n) = n \ln 2$ .

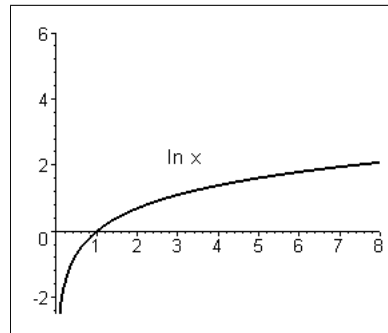
Soit alors un réel  $A$  quelconque : a-t-on  $\ln x > A$  pour  $x$  assez grand ? On voit qu'on peut trouver  $n$  tel que  $\ln(2^n) > A$  : en effet il suffit que  $n \ln 2 > A$ , donc que  $n > \frac{A}{\ln 2}$ . Comme  $\ln$  est croissante, si  $x > 2^n$  (avec ce choix de  $n$ ), on a bien  $\ln x > A$  : on vient de montrer que, pour tout  $A$ , si  $x$  est assez grand on a  $\ln x > A$ , autrement dit que  $\ln x \rightarrow +\infty$  quand  $x \rightarrow +\infty$ .

Pour la limite à droite en 0, posons  $u = \frac{1}{x}$ . Alors  $\ln u = -\ln x$ , et quand  $x \xrightarrow{>} 0$ , on a  $u \rightarrow +\infty$  donc  $\ln u \rightarrow +\infty$  et  $\ln x \rightarrow -\infty$ .

<sup>1</sup>Du nom du mathématicien et financier écossais John Neper (ou Napier) qui inventa la notion de logarithme en 1614.

La fonction  $\ln$  est continue puisqu'elle est dérivable. Soit  $a$  un réel quelconque, et prenons  $A$  et  $B$  tels que  $A < a < B$  : d'après ce qu'on vient de montrer plus haut, il existe  $x_1$  tel que  $\ln x_1 < A$  et  $x_2$  tel que  $\ln x_2 > B$ . Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc  $x_0$  tel que  $\ln x_0 = a$ . Comme  $\ln$  est strictement croissante, donc bijective, ce  $x_0$  est unique. On vient donc de montrer que  $\ln$  est une bijection de  $\mathbb{R}^{+*}$  sur  $\mathbb{R}$ .  $\square$

En particulier il existe un unique  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $\ln x = 1$ . On note ce réel par la lettre  $e$ . On peut démontrer que  $e$  est irrationnel. Le début de son développement décimal est  $e = 2,71828\dots$



## 2.2 Logarithme à base $a$

Soit  $a$  un réel strictement supérieur à 1. On appelle **logarithme à base  $a$**  la fonction

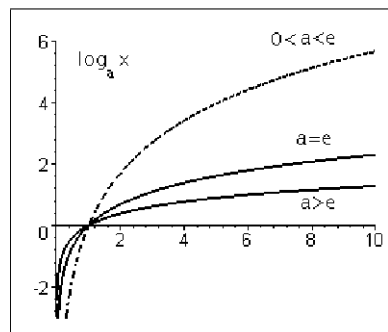
$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

On a immédiatement les propriétés

$$\begin{aligned} \log_a 1 &= 0, \\ \log_a a &= 1, \\ \log_a(xy) &= \log_a x + \log_a y. \end{aligned}$$

Le logarithme népérien est le logarithme à base  $e$ .

Comme  $a > 1$ ,  $\ln a > 0$ , donc les propriétés de croissance et les limites en 0 et  $+\infty$  sont les mêmes que pour la fonction  $\ln$ .



On utilise en particulier les logarithmes décimaux (à base 10), notés tout simplement  $\log x$ . Ils sont assez commode pour évaluer les ordres de grandeur : en effet si  $n$  est la partie entière de  $\log x$ , cela indique que  $x$  est entre  $10^n$  et  $10^{n+1}$ .

On utilise également, notamment pour l'informatique, les logarithmes à base 2.

### 3 Exponentielle et fonctions à exposant réel

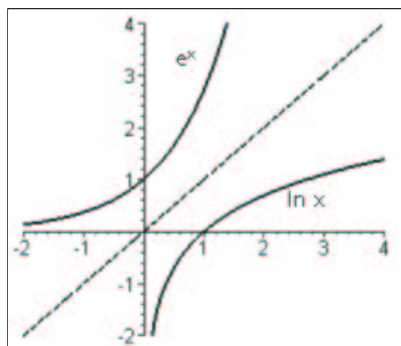
#### 3.1 Fonction exponentielle

On a vu plus haut (Proposition ??) que la fonction  $\ln$  est une bijection continue croissante de  $\mathbb{R}^{+*}$  sur  $\mathbb{R}$ . Elle admet donc une fonction réciproque, bijection continue croissante de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$ . On appelle cette fonction *exponentielle*, et on la note  $y = \exp x$  ou  $y = e^x$ . Par définition, on a donc, pour tout  $x > 0$ ,

$$\exp(\ln x) = x,$$

et pour tout  $x$  réel,

$$\ln(\exp x) = x.$$



#### Dérivée de l'exponentielle

La fonction exponentielle est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , puisque elle est la réciproque de la fonction dérivable  $\ln$ , dont la dérivée n'est jamais nulle.

Pour calculer sa dérivée, posons  $u(x) = e^x$ , et dérivons les deux membres de l'égalité  $\ln(u(x)) = x$  :

On obtient  $\frac{u'(x)}{u(x)} = 1$ , donc  $u'(x) = u(x)$ .

Autrement dit l'exponentielle est sa propre dérivée : on a

$$(e^x)' = e^x.$$

**Exercice** Retrouvez ce résultat en appliquant la règle de dérivation d'une fonction réciproque.

**Exponentielle d'une somme**

Soient  $a$  et  $b$  deux réels. Pour transformer l'expression  $\exp(a) \cdot \exp(b)$ , prenons son logarithme et appliquons la règle fondamentale de la Proposition ?? :

$$\ln(\exp(a) \cdot \exp(b)) = \ln(\exp a) + \ln(\exp b) = a + b.$$

En "repassant à l'exponentielle" on obtient la formule bien connue

$$\boxed{\exp(a + b) = \exp(a) \cdot \exp(b).}$$

Des valeurs  $\ln 1 = 0$  et  $\ln e = 1$ , on déduit immédiatement

$$\boxed{\exp(0) = 1, \quad \exp(1) = e.}$$

On déduit de cela les règles supplémentaires :

$$\boxed{\exp(-x) = \frac{1}{\exp x}}$$

et, pour tout  $r \in \mathbb{Q}$ ,

$$\boxed{\exp(rx) = (\exp x)^r.}$$

Remarquons que toutes ces formules justifient la notation  $e^x$ , puisque elles s'expriment alors comme des propriétés « naturelles » des expressions comportant des exposants :

$$e^{a+b} = e^a e^b, \quad e^0 = 1, \quad e^1 = e, \quad e^{-x} = \frac{1}{e^x}, \quad e^{rx} = (e^x)^r$$

**Limites**

**Proposition 3.1.1** *Quand  $x \rightarrow +\infty$ ,  $e^x \rightarrow +\infty$  et quand  $x \rightarrow -\infty$ ,  $e^x \rightarrow 0$ .*

**Preuve** Cela se déduit facilement des propriétés de la fonction  $\ln$  : Soit  $A > 0$  (aussi grand que l'on veut ...) ; dès que  $x > \ln A$ , on a  $e^x > A$ . Donc, pour tout  $A > 0$  il existe bien un  $B$  tel que

$$x > B \Rightarrow e^x > A.$$

C'est la définition même de «  $e^x \rightarrow +\infty$  quand  $x \rightarrow +\infty$  ».

On en déduit alors la limite en  $-\infty$  en utilisant la formule  $\exp(-x) = \frac{1}{\exp x}$ . □

**Application** Pour montrer qu'une fonction à valeurs positives  $f(x)$  tend vers 0 (ou vers  $+\infty$ ) quand  $x$  tend vers une certaine valeur  $a$  (finie ou infinie) il suffit d'étudier la limite de la fonction  $u(x) = \ln(f(x))$  : si, pour  $x \rightarrow a$ ,  $u(x) \rightarrow +\infty$ , alors  $f(x) = \exp(u(x)) \rightarrow +\infty$  ; si  $u(x) \rightarrow -\infty$ , alors  $f(x) = \exp(u(x)) \rightarrow 0$ .

Par ailleurs, si  $u(x)$  tend vers une limite finie  $l$ ,  $f(x)$  tend vers  $e^l$ , puisque la fonction exponentielle est continue.

### 3.2 Expressions à exposant réel

Remarquons que, si  $x > 0$  et  $r \in \mathbb{Q}$ , on a l'égalité  $x^r = \exp(r \ln x)$ . Il est naturel d'étendre cette égalité à tout  $r \in \mathbb{R}$  :

**Définition 3.2.1** Soit  $a$  un réel positif,  $b$  un réel quelconque. On note  $a^b$  la quantité  $\exp(b \ln a)$ .

On a donc, pour tout  $a > 0$  et  $b \in \mathbb{R}$ , l'identité

$$a^b = e^{b \ln a}.$$

**Exercice** Vérifier qu'on a toujours les égalités  $a^{b+c} = a^b a^c$ ,  $a^0 = 1$  et  $a^{-b} = 1/a^b$ .

On peut alors étudier deux types de fonctions :

- ou bien  $b$  est fixé,  $a$  varie, et on étudie la fonction  $x \mapsto x^b$  (fonction “puissance” d'exposant  $b$ ),
- ou bien  $a$  est fixé,  $b$  varie, et on étudie la fonction  $x \mapsto a^x$  (fonction “exponentielle à base  $a$ ”).

### 3.3 Fonctions $y = x^r$ ( $r \in \mathbb{R}$ )

Pour un réel fixé  $r$ , on peut définir sur  $\mathbb{R}^{+*}$  la fonction  $P_r(x) = x^r = e^{r \ln x}$ .

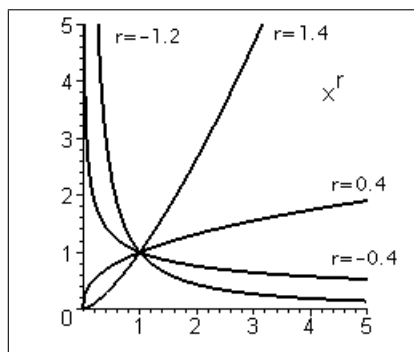
On obtient facilement les propriétés

$$1^r = 1, \quad (x^r)' = r x^{r-1}.$$

Si  $r > 0$ , on a  $x^r \rightarrow +\infty$  quand  $x \rightarrow +\infty$  et  $x^r \rightarrow 0$  quand  $x \rightarrow 0^+$ . On peut donc, en prolongeant par continuité, poser alors  $P_r(0) = 0$ .

Si  $r < 0$ ,  $x^r \rightarrow 0^+$  quand  $x \rightarrow +\infty$  et  $x^r \rightarrow +\infty$  quand  $x \rightarrow 0^+$ .

Tout cela ne fait que prolonger les propriétés des fonctions  $x^r$  ( $r \in \mathbb{Q}$ ).



### Exercices

1. Pour quelles valeurs de  $r$  la fonction  $P_r$  est-elle dérivable à droite en 0 ?
2. Supposons que  $r < s$  ; comparer  $x^r$  et  $x^s$  suivant les valeurs de  $x$ .

**Proposition 3.3.1 - Croissances comparées** - Pour tout réel  $r$  strictement positif :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^r} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^r \ln x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^r} = +\infty$$

**Preuve-exercice**

1. Soit  $\beta \in \mathbb{R}^{*+}$ , étudier les variations de la fonction  $f_\beta(x) = \beta \ln x - x^\beta$ . En déduire que pour tout  $\beta > 0$  et pour tout  $x > 0$ ,  $\beta \ln x < x^\beta$ .
2. Montrer alors que pour tout réel  $r$  strictement positif,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^r} = 0$ .
3. En déduire que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^r \ln x = 0$ .
4. Montrer que  $\ln \left( \frac{e^x}{x^r} \right) \rightarrow +\infty$  quand  $x \rightarrow +\infty$ .
5. En déduire que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^r} = +\infty$  □

**Corollaire 3.3.2** Pour tout rationnel  $r > 0$  où  $x^r$  est défini pour  $x < 0$ ,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^r e^x = 0.$$

**Preuve** Cette limite se déduit de la dernière limite de la proposition précédente en posant  $y = -x$ . □

### 3.4 Fonction exponentielle à base $a$ (fonction $y = a^x$ )

Soit  $a$  un réel positif fixé. Considérons la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$\exp_a(x) = a^x = e^{x \ln a}.$$

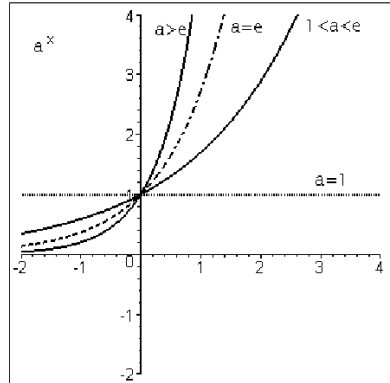
Remarquons que pour  $a = e$ , on retrouve la fonction exponentielle, puisque  $\ln e = 1$ .

De plus, on a  $y = a^x$  si et seulement si  $\ln y = x \ln a$ , donc  $x = \frac{\ln y}{\ln a} = \log_a y$ . Autrement dit  $\exp_a$  est la fonction réciproque de  $\log_a$ .

La dérivée de cette fonction est obtenue par dérivation de  $e^{x \ln a}$ , on trouve

$$\boxed{(a^x)' = \ln a \cdot a^x.}$$

Le sens de variation et les limites en  $\pm\infty$  dépendent du signe de  $\ln a$  : la fonction est croissante de 0 à  $+\infty$  si  $a > 1$  ( $\ln a > 0$ ) et décroissante de  $+\infty$  à 0 si  $0 < a < 1$  ( $\ln a < 0$ ). Elle est constante si  $a = 1$ .



**Exercice** Tracer le graphe des fonctions  $y = (0.5)^x$  et  $y = 2^x$ . Comment passe-t-on géométriquement d'un graphe à l'autre ?

## 4 Fonctions trigonométriques

### 4.1 Fonctions circulaires

La définition et l'étude des fonctions sinus et cosinus d'une variable réelle sont fondées ici sur les notions intuitives d'angle, de longueur d'un arc de cercle et d'aire plane. Une définition purement analytique de ces fonctions, ainsi que des notions mathématiques rigoureuses de longueur et d'aire seront données dans les années ultérieures de la licence.

#### Sinus, cosinus et tangente d'un angle

Un angle orienté  $\alpha$  peut être repéré par le point  $M$  du cercle unité tel que l'angle  $(Ox, OM)$  soit égal à  $\alpha$ . Notez qu'ici  $\alpha$  désigne un angle au sens purement géométrique ; on n'a pas encore associé de nombre réel à cet angle.

On définit alors les nombres  $\cos \alpha$  et  $\sin \alpha$  comme l'abscisse et l'ordonnée, respectivement, de ce point  $M$ . Le théorème de Pythagore nous donne l'égalité bien connue

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.$$

De plus, on définit  $\operatorname{tg} \alpha$  (ou  $\tan \alpha$ ) comme la pente de la droite  $OM$ , c'est à dire  $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ .

Les propriétés de symétrie du cercle permettent facilement de montrer que  $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ , et  $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$ . On a donc aussi  $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$ .

Si on définit de manière correcte la somme de deux angles<sup>2</sup> on peut démontrer géométriquement

<sup>2</sup>Ce qui n'est pas très facile !

les formules d'addition bien connues (voir Exercice page ??) :

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta \\ \operatorname{tg}(\alpha + \beta) &= \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}.\end{aligned}$$

Puisqu'un angle peut être associé de façon unique à un point du cercle unité, les fonctions qui associent à un angle son sinus, son cosinus et sa tangente peuvent être considérées comme des applications du cercle unité dans  $\mathbb{R}$ .

### Mesures d'un angle

Soit  $I$  le point du plan de coordonnées  $(1, 0)$ . A tout réel  $x$  on peut associer le point  $M(x)$  du cercle unité, obtenu en décrivant sur ce cercle, à partir de  $I$ , un arc de longueur  $|x|$ , dans le sens positif si  $x > 0$  et dans le sens négatif si  $x < 0$ .

On dit alors que l'angle orienté  $(OI, OM)$  est de mesure  $x$  radians. Un angle d'un radian est donc un angle positif  $(OI, OM)$  tel que l'arc  $\widehat{IM}$  soit de longueur 1. Un angle d'un radian vaut un peu plus de 57 degrés.

On a ainsi défini une fonction  $x \mapsto M(x)$  de  $\mathbb{R}$  sur le cercle unité. Le périmètre du cercle unité étant égal à  $2\pi$ , cette application est périodique, de période  $2\pi$ , c'est à dire que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on a  $M(x + 2\pi) = M(x)$ .

La fonction  $M(x)$  n'est donc pas du tout bijective, chaque point du cercle unité possède une infinité d'antécédents. Autrement dit chaque angle possède une infinité de mesures, qui sont séparées par les multiples entiers de  $2\pi$ .

En revanche, si on se restreint à un intervalle  $\mathcal{I}$  semi-ouvert de longueur  $2\pi$ , comme par exemple  $] - \pi, \pi]$  ou  $[0, 2\pi[$ , la restriction de  $M(x)$  à cet intervalle est une bijection de  $\mathcal{I}$  sur le cercle unité.

### Fonctions circulaires numériques

En composant la fonction  $x \mapsto M(x)$  définie ci-dessus avec les fonctions trigonométriques d'un angle, on obtient les *fonctions numériques* appelées fonctions circulaires :

- $\cos x$  et  $\sin x$  sont les coordonnées du point  $M(x)$  ;
- $\operatorname{tg} x$  est la pente de la droite joignant  $M(x)$  à l'origine.

On voit donc que la fonction  $\operatorname{tg} x$  n'est définie que si  $x$  n'est pas de la forme  $\frac{\pi}{2} + k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) (pour ces valeurs-là la droite  $OM(x)$  est verticale).

Les fonctions  $\sin$  et  $\cos$ , tout comme la fonction  $M(x)$ , sont périodiques de période  $2\pi$ . La fonction  $\operatorname{tg}$  est de période  $\pi$ .

La fonction  $\cos$  est paire, les fonctions  $\sin$  et  $\operatorname{tg}$  sont impaires.

On peut démontrer (c'est un peu laborieux) que les formules classiques de trigonométrie, valables pour les fonctions circulaires sur les angles, restent vraies pour les fonctions circulaires numériques.

**Proposition 4.1.1** *Les fonctions numériques sin et cos sont dérivables sur  $\mathbb{R}$  ; la fonction tg est dérivable en tout point de  $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ . On a les formules :*

$$\begin{aligned} (\sin x)' &= \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \\ (\cos x)' &= -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \\ (\operatorname{tg} x)' &= 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

**Preuve en exercice** On montre d'abord que  $\frac{\sin x}{x}$  tend vers 1 quand  $x$  tend vers 0, c'est-à-dire que la fonction sinus est dérivable en zéro de nombre dérivé 1.

1. Soit  $x \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ . Dessiner dans  $\mathbb{C}$  le secteur  $S$  décrit par les  $\lambda e^{i\theta}$ , avec  $0 \leq \theta \leq x$  et  $0 \leq \lambda \leq 1$ . Quelle est l'aire de  $S$  sachant qu'elle est proportionnelle à  $x$  ?
2. En comparant le rectangle de sommets  $0, i \sin x, e^{ix}, \cos x$  avec  $S$ , montrer que  $\sin x \leq x$ .
3. A l'aide d'une autre comparaison d'aires, montrer qu'on a  $x \leq \tan x$ .
4. Montrer alors que :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ .

On montre ensuite que  $\frac{\cos x - 1}{x}$  tend vers 0 quand  $x$  tend vers 0, c'est-à-dire que la fonction cosinus est dérivable en zéro de nombre dérivé 0.

1. Montrer que pour tout réel  $x$  non nul,  $\frac{\cos x - 1}{x} = \frac{x \sin^2(x/2)}{2(x/2)^2}$
2. En déduire la limite cherchée.

Enfin, de la formule d'addition du sinus, on déduit que pour tous réels  $a$  et  $h$  on a

$$\frac{\sin(a+h) - \sin a}{h} = \sin a \frac{1 - \cos h}{h} + \cos a \frac{\sin h}{h}$$

et on voit que, pour  $a$  fixé, quand  $h \rightarrow 0$  le premier terme de la somme tend vers 0, et le deuxième vers  $\cos a$ . Donc la fonction sin admet en  $a$  une dérivée égale à  $\cos a$ .

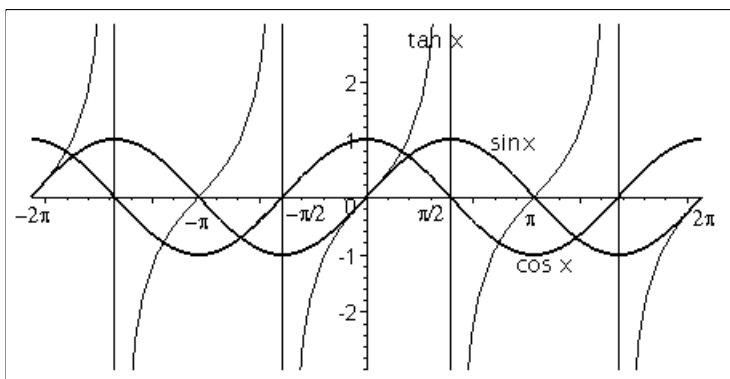
On procède de manière analogue pour le cos, et on en déduit la dérivée de la tangente par les règles de dérivation d'une fraction.  $\square$

Il en résulte notamment que ces fonctions sont continues sur leur domaine de définition.

On en déduit que l'image des fonctions sin et cos est l'intervalle  $[-1, 1]$ .

L'image de la fonction tg est  $\mathbb{R}$  tout entier ; en effet, sur chaque intervalle  $]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi [$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ), la fonction tg est continue, et croît de  $-\infty$  à  $+\infty$ .

A partir de toutes ces données, on retrouvera le tableau de variation et l'allure du graphe de ces trois fonctions:



## 4.2 Fonctions circulaires réciproques

Bien sûr, les fonctions circulaires  $\sin$ ,  $\cos$  et  $\text{tg}$  ne sont pas bijectives, et n'admettent donc pas globalement de fonctions réciproques. Mais pour chacune de ces fonctions, on peut trouver un intervalle, le plus grand possible, sur lequel la restriction de la fonction considérée est bijective. Par commodité, on choisira un intervalle contenant la valeur 0. On peut alors définir ce qu'on appelle les **fonctions circulaires réciproques** (ou fonctions circulaires inverses).

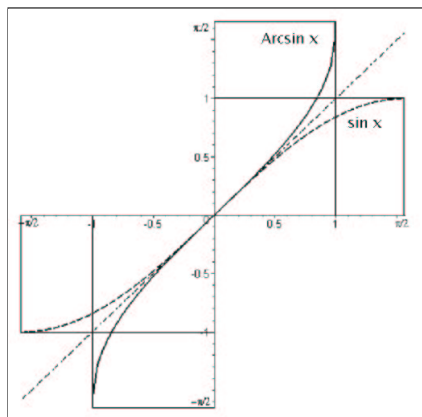
### Fonction Arc sinus

La fonction  $\sin$ , restreinte à l'intervalle  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , est continue et strictement croissante de  $-1$  à  $1$ . Cette restriction est donc une bijection de  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  sur  $[-1, 1]$ . Elle admet une fonction réciproque, notée  $\text{Arcsin}$ , bijection croissante de  $[-1, 1]$  sur  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ .

On peut donc définir :

$$\forall x \in [-1, 1] \quad y = \text{Arcsin } x \Leftrightarrow x = \sin y \text{ et } y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

On pourra retenir la phrase «  $\text{Arcsin } x$  est l'arc, compris entre  $\frac{\pi}{2}$  et  $-\frac{\pi}{2}$ , dont le sinus vaut  $x$  ». Notons que la fonction ainsi obtenue est impaire.



Ainsi, par exemple, on a  $\sin \frac{5\pi}{6} = 1/2$ , mais  $\frac{5\pi}{6} \notin [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , donc  $\text{Arcsin}(1/2)$  n'est pas égal à  $\frac{5\pi}{6}$ .

Mais on a aussi  $\sin \frac{\pi}{6} = 1/2$ , et cette fois-ci  $\frac{\pi}{6} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , donc  $\text{Arcsin}(1/2) = \frac{\pi}{6}$ .

On retiendra les valeurs

$$\text{Arcsin}(0) = 0, \quad \text{Arcsin}(1) = \frac{\pi}{2}, \quad \text{Arcsin}(-1) = -\frac{\pi}{2}.$$

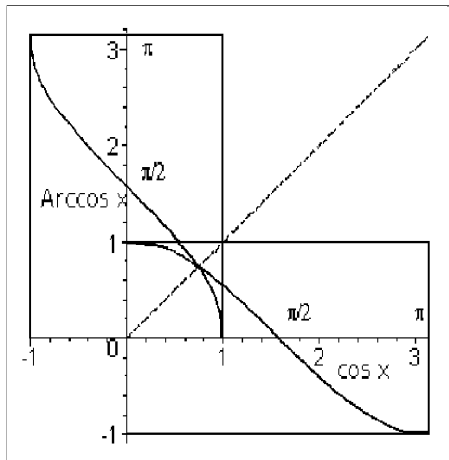
### Fonction Arc cosinus

SI on restreint la fonction  $\cos$  à l'intervalle  $[0, \pi]$ , on obtient une bijection décroissante de  $[0, \pi]$  sur  $[-1, 1]$ . Cette restriction admet donc une fonction réciproque, notée  $\text{Arccos}$ .

On définit donc :

$$\boxed{\forall x \in [-1, 1] \quad y = \text{Arccos } x \Leftrightarrow x = \cos y \text{ et } y \in [0, \pi].}$$

On pourra retenir la phrase «  $\text{Arccos } x$  est l'arc, compris entre 0 et  $\pi$ , dont le cosinus vaut  $x$  ».



Ainsi  $\frac{\pi}{2}$  et  $-\frac{\pi}{2}$  ont tous les deux un cosinus égal à 0. Mais comme seul  $\frac{\pi}{2} \in [0, \pi]$ , on a  $\text{Arccos } 0 = \frac{\pi}{2}$ .

On retiendra les valeurs

$$\text{Arccos}(0) = \frac{\pi}{2}, \quad \text{Arccos}(1) = 0, \quad \text{Arccos}(-1) = \pi.$$

### Fonction Arc tangente

La fonction  $\tan$ , restreinte à  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  (intervalle ouvert !), est une bijection continue croissante de cet intervalle sur  $\mathbb{R}$ .

Elle admet donc une fonction réciproque, notée  $\text{Arctan}$  (ou  $\text{Arctg}$ ), bijection continue croissante de  $\mathbb{R}$  sur  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ .

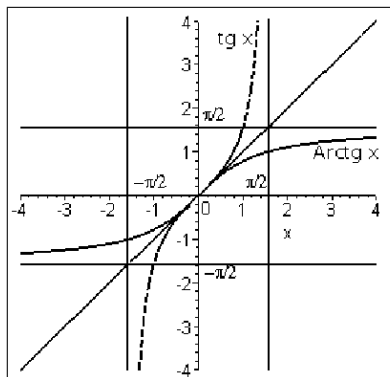
On peut donc écrire

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad y = \text{Arctan } x \Leftrightarrow x = \text{tg } y \text{ et } y \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[.}$$

Donc  $\text{Arctan } x$  est l'arc, compris entre  $-\frac{\pi}{2}$  et  $\frac{\pi}{2}$ , dont la tangente vaut  $x$ . La fonction ainsi obtenue est impaire.

Notons qu'en particulier,  $\text{Arctan } x \rightarrow \frac{\pi}{2}$  quand  $x \rightarrow +\infty$  et  $\text{Arctan } x \rightarrow -\frac{\pi}{2}$  quand  $x \rightarrow -\infty$ . On retiendra également que

$$\text{Arctan}(0) = 0, \quad \text{Arctg}(1) = \frac{\pi}{4}.$$



### Exercices

1. Question piège : les fonctions Arcsin et Arctan sont impaires. Peut-on dire que la fonction Arccos est paire ?
2. Pour quelles valeurs de  $x$  les égalités suivantes sont-elles vraies ?

$$\text{Arcsin}(\sin x) = x,$$

$$\sin(\text{Arcsin } x) = x,$$

$$\text{Arccos}(\cos x) = x,$$

$$\cos(\text{Arccos } x) = x.$$

### Dérivées des fonctions circulaires réciproques

Sur  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , la fonction  $\sin$  est dérivable, et sa dérivée ne s'annule qu'en  $\frac{\pi}{2}$  et  $-\frac{\pi}{2}$ . Par la proposition (1.2.4) du chapitre 5, la fonction réciproque Arcsin est dérivable sur  $] -1, 1[$ . On voit qu'il en est de même de la fonction Arccos. Par ailleurs, la fonction  $\tan$  est dérivable sur son domaine de définition, et sa dérivée ne s'annule jamais. Il en résulte que la fonction Arctan est dérivable sur tout  $\mathbb{R}$ .

**Proposition 4.2.1** Pour tout  $x \in ]-1, 1[$ , les fonctions Arcsin  $x$  et Arccos  $x$  sont dérivables, avec

$$\boxed{(\text{Arcsin } x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\text{Arccos } x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.}$$

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , la fonction Arctan  $x$  est dérivable, et on a

$$\boxed{(\text{Arctan } x)' = \frac{1}{1+x^2}.}$$

**Preuve** Soit  $x \in ]-1, 1[$ , et soit  $y = \text{Arcsin } x$ , donc  $y \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  et  $x = \sin y$ . Comme  $(\sin y)' = \cos y$ , par la proposition (1.2.4) du chapitre 5, on a  $(\text{Arcsin } x)' = \frac{1}{\cos y}$ .

Mais comme  $y \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ , on a  $\cos y > 0$ , donc  $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$ . On trouve bien la formule annoncée pour la dérivée de  $\text{Arcsin } x$ .

De même, si  $x \in ]-1, 1[$  et  $u = \text{Arccos } x$ , on a  $x = \cos u$  et  $u \in ]0, \pi[$ . Donc  $(\text{Arccos } x)' = \frac{1}{-\sin u} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ , puisque  $u \in ]0, \pi[ \Rightarrow \sin u > 0$  donc  $\sin u = \sqrt{1 - \cos^2 u} = \sqrt{1 - x^2}$ .

Enfin, soit  $v = \text{Arctan } x$ , donc  $x = \tan v$ . On rappelle que  $(\tan v)' = 1 + \tan^2 v$ .

Donc  $(\text{Arctan } x)' = \frac{1}{1 + \tan^2 v} = \frac{1}{1 + x^2}$ . □

**Exercice** Il résulte de ces formules que la fonction  $\text{Arcsin } x + \text{Arccos } x$  est constante. Que vaut cette constante ?

## 5 Fonctions hyperboliques et leurs réciproques

### 5.1 Fonctions hyperboliques directes

Par analogie avec les formules d'Euler  $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$  et  $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ , on définit les deux fonctions “cosinus hyperbolique” et “sinus hyperbolique”, définies sur  $\mathbb{R}$  par

$$\boxed{\text{ch } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \text{sh } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.}$$

On les note aussi parfois  $\cosh x$  et  $\sinh x$ . Notons qu'on définit aussi la fonction tangente hyperbolique :  $\text{th } x = \frac{\text{sh } x}{\text{ch } x}$ , définie sur  $\mathbb{R}$  puisque  $\text{ch } x$  ne s'annule jamais (elle est également notée parfois  $\tanh x$ ).

On vérifiera qu'on a, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\boxed{\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1}.$$

De même que, quand  $x$  parcourt  $\mathbb{R}$ , le point de coordonnées  $(\cos x, \sin x)$  décrit le cercle unité, le point de coordonnées  $(\text{ch } x, \text{sh } x)$  décrit un arc de l'hyperbole d'équation  $x^2 - y^2 = 1$ , d'où le nom de fonctions hyperboliques.

On vérifiera les formules suivantes, à retenir :

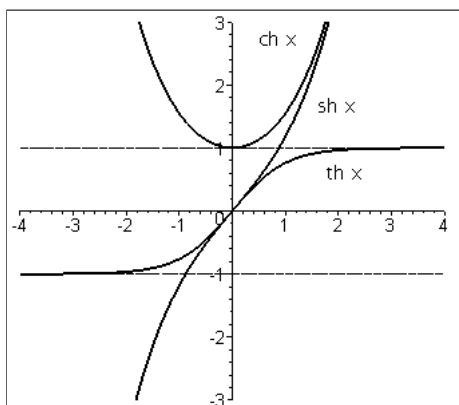
$$\boxed{\begin{aligned} \text{ch } 0 &= 1, & \text{sh } 0 &= 0, \\ \text{ch}(-x) &= \text{ch } x, & \text{sh}(-x) &= -\text{sh } x, \\ (\text{ch } x)' &= \text{sh } x, & (\text{sh } x)' &= \text{ch } x, \end{aligned}}$$

Donc la fonction  $\text{ch}$  est paire, la fonction  $\text{sh}$  est impaire (ainsi que la fonction  $\text{th}$ ).

Pour  $x$  variant de  $-\infty$  à  $0$ , la fonction  $\text{ch } x$  décroît de  $+\infty$  à  $1$ , puis elle croît de  $1$  à  $+\infty$  pour  $x$  variant de  $0$  à  $+\infty$ .

La fonction  $\text{sh } x$ , elle, croît de  $-\infty$  à  $+\infty$  quand  $x$  parcourt  $\mathbb{R}$ .

Enfin, quand  $x$  parcourt  $\mathbb{R}$ , la fonction  $\text{th } x$  croît de  $-1$  (limite pour  $x \rightarrow -\infty$ ) à  $1$  (limite pour  $x \rightarrow +\infty$ ).



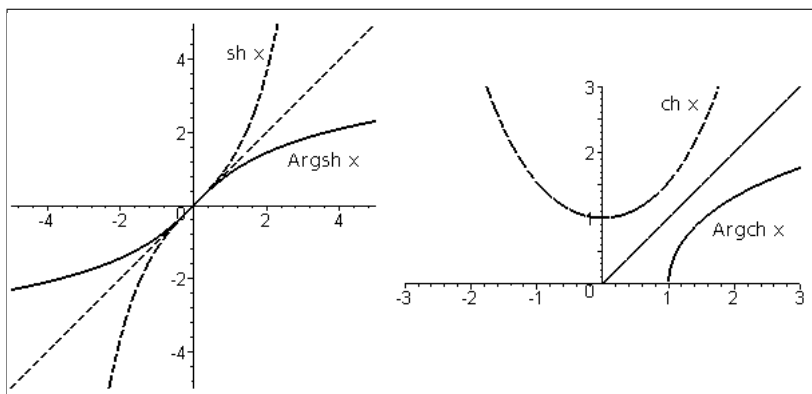
## 5.2 Fonctions hyperboliques réciproques

D'après le paragraphe précédent, la fonction  $\text{sh}$  est une bijection continue croissante de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$ , donc elle admet une fonction réciproque, définie continue et croissante sur  $\mathbb{R}$  ; on la note  $\text{Argsh } x$  ("argument  $\text{sh}$ " de  $x$ ).

La restriction de  $\text{ch}$  à  $\mathbb{R}^+$  est une bijection continue croissante de  $\mathbb{R}^+$  sur  $[1, +\infty[$ . Elle admet une fonction réciproque, notée  $\text{Argch } x$  ("argument  $\text{ch}$ " de  $x$ ) ; c'est une bijection continue croissante de  $[1, +\infty[$  sur  $\mathbb{R}^+$ .

On retiendra donc

$$\begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{R} \quad y = \text{Argsh } x \Leftrightarrow x = \text{sh } y, \\ \forall x \geq 1 \quad y = \text{Argch } x \Leftrightarrow x = \text{ch } y \text{ et } y \geq 0. \end{array}$$



Remarquons que si  $x = \text{sh } y$ , alors  $\text{ch } y = \sqrt{1 + x^2}$ , et que si  $y \geq 0$  et  $x = \text{ch } y$ , alors  $\text{sh } y = \sqrt{x^2 - 1}$ .

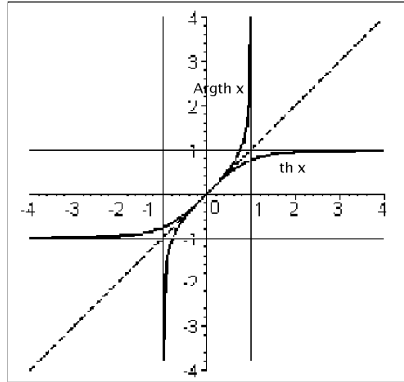
De manière analogue aux fonctions  $\text{Arcsin}$  et  $\text{Arccos}$ , on en tire les formules de dérivation :

$$(\text{Argsh } x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}, \quad (\text{Argch } x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

La fonction  $\operatorname{Argch}$  est dérivable seulement sur  $]1, +\infty[$ .

### Exercice

- Définir de même la fonction  $\operatorname{Argth}$ , réciproque de la fonction  $\operatorname{th}$ , étudier sa dérivabilité et ses variations, et montrer qu'on obtient le graphe suivant:



- Sur un même schéma, représenter les graphes de  $\operatorname{ch} x$ ,  $\operatorname{sh} x$  et de  $\frac{e^x}{2}$ .

## 6 Exercices

**6.1** Soient  $\Gamma_1$  le graphe de  $y = \ln x$  et  $\Gamma_2$  celui de  $y = \ln(2x)$ .

- Soit  $x > 0$ . La verticale d'abscisse  $x$  coupe  $\Gamma_1$  en  $A$  et  $\Gamma_2$  en  $B$ . Combien vaut la longueur  $AB$  ?
- Soit  $K$  un point de  $Oy$ . L'horizontale passant par  $K$  coupe  $\Gamma_1$  en  $L$  et  $\Gamma_2$  en  $M$ . Montrer que  $M$  est le milieu de  $KL$ .

**6.2** Etudier les fonctions suivantes et tracer l'allure de leur graphe :

- $f(x) = x + \ln(x^2 - 1)$ .
- $g(x) = (x - 1) \ln \left( \frac{1 - x}{1 + x} \right)$ .
- $h(x) = \exp \left( \frac{x - 1}{x^2} \right)$  (on montrera qu'on peut la prolonger par continuité à  $\mathbb{R}$  tout entier, et on dira si la fonction obtenue est dérivable).
- $k(x) = x^{1/x}$ .
- $l(x) = \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x$ .

**6.3**

1. Montrer que, pour tout  $x > 0$ , on a  $\ln x \geq \frac{x-1}{x}$ . Quand a-t-on égalité ?
2. On considère la fonction définie sur  $\mathbb{R}^{+*}$  par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Montrer que  $f$  est continue et dérivable.

Etudier ses variations et tracer son graphe.

**6.4 Etude de  $y = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ .**

1. Etudier la fonction  $u(x) = e^{x^2}$  et tracer son graphe.
2. On définit sur  $\mathbb{R}$  la fonction

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

- (a) Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .
- (b) Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , et que sa dérivée est continue.
- (c) Montrer par récurrence sur  $n$  qu'en un point  $x \neq 0$  on a

$$f^{(n)}(x) = Q_n(x) e^{-\frac{1}{x^2}},$$

où  $Q_n(X)$  est une fraction rationnelle. Calculer la limite de  $f^{(n)}(x)$  quand  $x \rightarrow 0$ .

- (d) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f$  admet en 0 une dérivée  $n$ -ième égale à 0.
- (e) Tracer le graphe de  $f$ .

**6.5 Formule pour le cosinus de la somme de deux angles**

Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux angles aigus positifs. Dans le plan  $\mathbb{R}^2$ , soient  $O$  l'origine,  $I$  le point de coordonnées  $(1, 0)$  et  $A, B$  les points du cercle unité tels que

$$(OI, OA) = \alpha, \quad (OA, OB) = \beta$$

de sorte que  $(OI, OB) = \alpha + \beta$ .

1. Soit  $H$  la projection orthogonale de  $B$  sur  $OA$ . Soient  $K$  et  $L$  les projections orthogonales respectives de  $B$  et  $H$  sur  $OI$ .  
Montrer par un raisonnement géométrique que  $OH = \cos \alpha \cos \beta$  et  $KH = \sin \alpha \sin \beta$  et en déduire  $\cos(\alpha + \beta)$ .
2. Montrer que les formules s'étendent à la somme de deux angles quelconques.

**6.6** Résoudre l'équation (d'inconnue  $x$ ) :  $\operatorname{Arcsin} x = \operatorname{Arccos} \frac{1}{3} + \operatorname{Arccos} \frac{1}{4}$ .

**6.7** Simplifier les expressions suivantes

$$\sin(2\operatorname{Arcsin} x), \quad \cos(2\operatorname{Arccos} x), \quad \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x}.$$

**6.8** Etudier les fonctions suivantes :

$$f(x) = \operatorname{Arcsin}(x^2), \quad g(x) = \operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arcsin} \frac{x}{2}.$$

**6.9** Pour quelles valeurs de  $x$  a-t-on  $\operatorname{Arctan}(\tan x) = x$  ? Quelles égalités a-t-on pour les autres valeurs de  $x$  ?

**6.10** Soit  $a \in \mathbb{R}$ . Calculer la dérivée de  $f(x) = \operatorname{Arctan} \left( \frac{x+a}{1-ax} \right)$ . En déduire une expression simplifiée de  $f(x)$ .

Effectuer un calcul analogue pour  $g(x) = \operatorname{Arctan} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$  (on précisera le domaine de définition de  $g$ ).

**6.11** Montrer les formules d'addition (analogues aux formules trigonométriques) suivantes

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}(a+b) &= \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b, \\ \operatorname{ch}(a+b) &= \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b, \\ \operatorname{th}(a+b) &= \frac{\operatorname{th} a + \operatorname{th} b}{1 + \operatorname{th} a \operatorname{th} b}. \end{aligned}$$

**6.12** Donner le domaine de définition et la dérivée des fonctions suivantes :

$$f(x) = \operatorname{sh}(\operatorname{Arcsin} x), \quad g(x) = \operatorname{Arctan}(\operatorname{sh} x).$$

**6.13** Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$\operatorname{ch}(nx) = \frac{1}{2} [(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)^n + (\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x)^n]$$

et écrire explicitement  $\operatorname{ch} 3x$  et  $\operatorname{ch} 4x$  en fonction de  $\operatorname{ch} x$  et  $\operatorname{sh} x$ .

**6.14**

1. Montrer que, pour tout  $x \geq 1$  on a  $\operatorname{Argch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ .  
A quoi est égal  $\ln \left| x + \sqrt{x^2 - 1} \right|$  quand il est défini, mais qu'on n'a pas  $x \geq 1$  ?
2. Trouver une formule analogue pour  $\operatorname{Argsh} x$ .
3. Montrer que, pour  $x \in ]-1, 1[$ , on a  $\operatorname{Argth} x = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right)$  (voir page ??).