Chapitre 5

Dérivabilité des fonctions numériques

1 Dérivée en un point

1.1 Définition

Considérons une fonction numérique f définie sur un intervalle $]a,b[$ de $\mathbb{R}$. Soit x_0 un point de $]a,b[$.

Définition 1.1.1 *Si la limite du « taux d'accroissement »* $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ *quand* x *tend vers* x_0 *existe et est finie, cette limite est appelée le « nombre dérivée » de* f *au point* x_0 *et est notée* $f'(x_0)$*. On dit alors que* f *est* **dérivable** *au point* x_0*.*
On a donc

$$f'(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Remarque On peut aussi dans cette expression poser $x = x_0 + h$, d'où $x - x_0 = h$, et on obtient

$$f'(x_0) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

On note aussi cette dérivée $\dfrac{df}{dx}(x_0)$ (et on peut préciser que c'est la dérivée *par rapport à* x s'il y a une ambiguïté).

Exemples On voit facilement qu'une fonction constante est dérivable en tout point, sa dérivée étant égale à 0. On vérifiera que les fonctions $y = 3x$ et $y = x^2$ sont dérivables en 0, et qu'en revanche les fonctions $y = |x|$ et $y = \sqrt[3]{x}$ ne le sont pas.

On appellera **domaine de dérivabilité** d'une fonction f l'ensemble des points où elle est dérivable. Pour les fonctions $y = |x|$ et $y = \sqrt[3]{x}$, par exemple, le domaine de dérivabilité est $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Pour les fonctions $y = 3x$ et $y = x^2$, c'est $\mathbb{R}$ tout entier[1].

[1] Les tests de pré-rentrée font souvent apparaître chez les étudiants débutants l'idée qu'une fonction n'est pas dérivable quand sa dérivée est nulle : cette idée est évidemment fausse, si la limite vaut 0, c'est qu'elle existe !

Interprétation physique Considérons le mouvement d'un véhicule sur une route, appelons $x(t)$ la distance (en km) parcourue par ce véhicule depuis son point de départ, à l'instant t (exprimé par exemple en heures). Alors le **taux d'accroissement** de $x(t)$ entre deux valeurs a, b représente la **vitesse moyenne** du véhicule entre les instants a et b, exprimée en km/h.
Si on considère la vitesse moyenne entre les instants t_0 et t, et qu'on fait tendre t vers t_0, cette vitesse moyenne tend vers la **vitesse instantanée** à l'instant t_0 (c'est la vitesse indiquée à cet instant par le compteur). La dérivée en t_0 de la fonction $x(t)$ représente donc la vitesse instantanée du véhicule à l'instant t_0, exprimée en km/h.

Interprétation graphique Considérons le graphe de la fonction f définie sur $]a, b[$.
Si $x_0, x \in]a, b[$, on peut tracer une droite D_x entre les 2 points du graphe de f, $(x_0, f(x_0))$ et $(x, f(x))$. La pente de cette droite est égale au taux d'accroissement de f entre x_0 et x.
Si f est dérivable en x_0, quand x tend vers x_0 la pente de la droite D_x tend vers une limite, égale à $f'(x_0)$. La droite "limite", passant par le point $(x_0, f(x_0))$ et de pente $f'(x_0)$, est appelée la **tangente** au graphe de f en ce point. L'équation de la tangente au graphe de f en ce point est donc

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)\,.$$

Dérivée d'une fonction croissante, décroissante ou constante Si une fonction f est croissante sur $]a, b[$, alors pour deux points distincts quelconques $x, x' \in]a, b[$ le taux d'accroissement de f entre x et x' est toujours positif ou nul. Par passage à la limite, il en résulte qu'aux points x_0 où f est dérivable, on a $f'(x_0) \geq 0$.
De même si f est décroissante, son taux d'accroissement est toujours négatif ou nul, ainsi que sa dérivée quand elle existe.
Enfin, si f est constante sur $]a, b[$, le taux d'accroissement entre deux points de $]a, b[$ est toujours nul, il en résulte qu'en tout point $x_0 \in]a, b[$, f est dérivable avec $f'(x_0) = 0$.
Remarquons que, même si la fonction f est strictement croissante, sa dérivée peut s'annuler en certains points : considérez l'exemple de la fonction $y = x^3$ au point $x_0 = 0$.

Proposition 1.1.2 *Une fonction f est dérivable en x_0, de nombre dérivé l en x_0 si et seulement si il existe une fonction $\varepsilon(h)$, tendant vers 0 pour $h \to 0$, telle que $\varepsilon(0) = 0$ et*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h\,(l + \varepsilon(h))\,. \tag{1.1.2.1}$$

Preuve Si f est dérivable en x_0, considérons la formule, vue plus haut,

$$f'(x_0) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Posons alors, pour $h \neq 0$,

$$\varepsilon(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0).$$

On a donc f dérivable en x_0 si et seulement si $\varepsilon(h) \to 0$ quand $h \to 0$ ($h \neq 0$). On peut alors prolonger par continuité la fonction $\varepsilon(h)$ en 0, en posant $\varepsilon(0) = 0$. Réciproquement, en utilisant (1.1.2.1) on voit que la limite du taux d'accroissement en x_0 existe, est finie et vaut l ainsi la fonction f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = l$.

Remarque Cette proposition peut s'appliquer de deux façons :

- Ou bien on sait que f est dérivable en x_0, et on peut alors écrire la formule (1.1.2.1);
- Ou bien on montre qu'il existe un certain nombre l et une fonction $\varepsilon(h)$ tels que $\varepsilon(h) \to 0$ quand $h \to 0$, et tels que l'on puisse écrire

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h\,(l + \varepsilon(h))$$

et on en conclut que f est dérivable en x_0 avec $f'(x_0) = l$.

Exercice (première règle de l'Hôpital[2]) Montrer en utilisant la proposition (1.1.2) que si $f(x)$ et $g(x)$ tendent vers 0 quand $x \to x_0$, et si f et g sont dérivables en x_0, avec $g'(x_0) \neq 0$, alors

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Appliquer cette règle pour calculer la limite de $\dfrac{\ln x}{1-\sqrt[3]{x}}$ quand $x \to 1$.

Exercice Déterminer le nombre dérivée en zéro de $f(x) = 1 + 2x + x\ln(1+x)$

1.2 Propriétés fondamentales

Proposition 1.2.1 *Si une fonction f est dérivable en x_0, elle est continue en x_0.*

Preuve Par (1.1.2) et en posant $h = x - x_0$ on a $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)(f'(x_0) + \varepsilon(x - x_0))$ ce qui donne $\lim_{x\mapsto x_0} f(x) = f(x_0)$, f est donc continue en x_0.

Remarque La réciproque est fausse : une fonction peut être continue en un point sans y être dérivable. Ainsi la fonction $y = |x|$ est continue en 0, mais non dérivable 0. On peut signaler l'existence de fonctions continues en tout point mais qui ne sont dérivables en aucun point (la construction de telles fonctions dépasse le programme de première année).

Dérivée et opérations élémentaires

Proposition 1.2.2 *Si f et g sont deux fonctions dérivables en x_0,et α un réel, les fonctions αf, $f+g$, fg et (si $g(x_0) \neq 0$) f/g sont dérivables en x_0 et :*

$$\begin{aligned}
(\alpha f)'(x_0) &= \alpha \cdot f'(x_0),\\
(f+g)'(x_0) &= f'(x_0) + g'(x_0),\\
(fg)'(x_0) &= f'(x_0)\,g(x_0) + f(x_0)\,g'(x_0),\\
\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \frac{g(x_0)f'(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.
\end{aligned}$$

Preuve Ces formules ont été vues dans l'enseignement secondaire. Montrons par exemple celle qui donne la dérivée d'un produit, en nous servant de la Proposition 1.1.2.
Appliquons la formule 1.1.2.1 aux fonctions f et g : il existe donc des fonctions $\varepsilon_1(h)$ et $\varepsilon_2(h)$, tendant vers 0 quand $h \to 0$, telles que
$f(x_0 + h) = f(x_0) + h\,(f'(x_0) + \varepsilon_1(h))$ et $g(x_0 + h) = g(x_0) + h\,(g'(x_0) + \varepsilon_2(h))$.

[2]Guillaume François Antoine, Marquis de l'Hôpital, Mathématicien français, 1661 – 1704.

Il en résulte que

$$\begin{aligned} f(x_0+h)\,g(x_0+h) =& f(x_0)\,g(x_0) + h\Big[f'(x_0)\,g(x_0) + f(x_0)\,g'(x_0) \\ & + f(x_0)\,\varepsilon_2(h) + g(x_0)\,\varepsilon_1(h) + h\,(f'(x_0)+\varepsilon_1(h))\,(g'(x_0)+\varepsilon_2(h))\Big]. \end{aligned}$$

En posant

$$\varepsilon_3(h) = f(x_0)\,\varepsilon_2(h) + g(x_0)\,\varepsilon_1(h) + h\,(f'(x_0)+\varepsilon_1(h))\,(g'(x_0)+\varepsilon_2(h)),$$

cela s'écrit encore

$$f(x_0+h)\,g(x_0+h) = f(x_0)\,g(x_0) + h\left[f'(x_0)\,g(x_0) + f(x_0)\,g'(x_0) + \varepsilon_3(h)\right],$$

et on constate que $\varepsilon_3(h) \to 0$ quand $h \to 0$.
Toujours d'après la Proposition 1.1.2, cela montre que $f'(x_0)\,g(x_0) + f(x_0)\,g'(x_0)$ est bien la dérivée de fg en x_0.

Application Sachant qu'on montre facilement que la dérivée de la fonction $y = x$ vaut 1 en tout point, on en déduit que la fonction $f(x) = x^2$ est dérivable en tout point, sa dérivée en x_0 valant $2x_0$, et que $g(x) = 1/x$ est dérivable en tout $x_0 \neq 0$, sa dérivée étant $-\dfrac{1}{x_0^2}$; puis par récurrence on démontre que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la dérivée de $y = x^n$ en x_0 est $n{x_0}^{n-1}$, et qu'en $x_0 \neq 0$ celle de $y = \dfrac{1}{x^n}$ est $-\dfrac{n}{{x_0}^{n+1}}$.
Tous ces résultats peuvent se résumer en écrivant que pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, la dérivée en x_0 de la fonction $f(x) = x^n$ est $n{x_0}^{n-1}$ (avec $x_0 \neq 0$ si $n < 0$).

Dérivée d'une fonction composée

Proposition 1.2.3 *Si f est une fonction dérivable au point x_0, et si la fonction g est définie et dérivable au point $f(x_0)$, alors la fonction composée $g \circ f$ est dérivable en x_0. Sa dérivée est donnée par*

$$\boxed{(g\circ f)'(x_0) = f'(x_0)\,\cdot\,g'(f(x_0)).}$$

Preuve On utilise encore la proposition 1.1.2. Il existe donc des fonctions $\varepsilon_1(h)$ et $\varepsilon_2(h)$, tendant vers 0 quand $h \to 0$, telles que

$$f(x_0+h) = f(x_0) + h\,\big(f'(x_0)+\varepsilon_1(h)\big)\ \ (1) \text{ et }\ g(y_0+k) = g(y_0) + k\,\big(g'(y_0)+\varepsilon_2(k)\big)\ \ (2),$$

en posant $y_0 = f(x_0)$. Alors

$$g(f(x_0+h)) = g\left[y_0 + h(f'(x_0)+\varepsilon_1(h))\right],$$

soit, en posant $k = h(f'(x_0)+\varepsilon_1(h))$ dans la formule (2) ci-dessus,

$$\begin{aligned} g(f(x_0+h)) = g(y_0+k) &= g(y_0) + k(g'(y_0)+\varepsilon_2(k) \\ &= g(y_0) + h(f'(x_0)+\varepsilon_1(h))[g'(y_0)+\varepsilon_2(h(f'(x_0)+\varepsilon_1(h))], \end{aligned}$$

ou encore

$$g(f(x_0+h)) = g(f(x_0)) + h[f'(x_0)g'(f(x_0)) + \varepsilon_3(h)],$$

où $\varepsilon_3(h)$ est une fonction (qu'on laisse au lecteur le soin de définir précisément) qui tend vers 0 quand $h \to 0$. En appliquant une nouvelle fois la Proposition 1.1.2, on obtient la conclusion cherchée.

Application Rappelons que les fonctions $f(x) = e^x$ et $g(x) = \ln(x)$ ont respectivement pour dérivée $f'(x) = e^x$ (pour tout $x \in \mathbb{R}$) et $g'(x) = 1/x$ (pour tout $x > 0$) — cela sera démontré dans le chapitre suivant.
Si $u(x)$ est dérivable en x_0, alors la fonction $e^{u(x)}$ l'est également, sa dérivée en ce point étant égale à $u'(x_0)\, e^{u(x_0)}$.
Si de plus $u(x) > 0$ pour x dans un intervalle ouvert autour de x_0, alors la fonction $\ln(u(x))$ est dérivable en x_0, de dérivée égale à $\dfrac{u'(x_0)}{u(x_0)}$. Cette dernière expression est appelée la **dérivée logarithmique** de u au point x_0 (y compris dans le cas où $u(x_0) < 0$).

Dérivée d'une fonction réciproque

Rappelons que si une fonction numérique f est strictement monotone et continue sur un intervalle $[a, b]$, c'est une bijection de $[a, b]$ sur l'intervalle $J = f([a, b])$ et, sa fonction réciproque $f^{-1} : J \to [a, b]$ est continue sur J. Examinons le cas où f est dérivable :

Proposition 1.2.4 *Soit f strictement monotone, continue sur $[a, b]$ et dérivable en un point $x_0 \in]a, b[$. Soit g sa fonction réciproque. Si $f'(x_0) \neq 0$, alors g est dérivable au point $y_0 = f(x_0)$ et sa dérivée est*

$$\boxed{g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(g(y_0))}.}$$

Preuve Les hypothèses impliquent que g est continue. Soient $y \in J$ et x tel que $y = f(x)$, c'est à dire $x = g(y)$. Si $y \neq y_0$ on a forcément $x \neq x_0$ et bien sûr $f(x) - f(x_0) \neq 0$.
Alors

$$\frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}.$$

Quand $y \to y_0$, x tend vers x_0 (parce que g est continue) donc la deuxième fraction tend vers $\dfrac{1}{f'(x_0)}$.

Application Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonctions $g(x) = x^{1/n}$ est définie sur $\mathbb{R}^+$ si n est pair et sur $\mathbb{R}$ si n est impair. C'est la fonction réciproque de $f(x) = x^n$ (sur $\mathbb{R}^+$ ou sur $\mathbb{R}$). Sa dérivée se calcule donc ainsi : si $y_0 = {x_0}^n$, avec $y_0 \neq 0$,

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{n{x_0}^{n-1}} = \frac{1}{n{y_0}^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n}{y_0}^{\frac{1}{n}-1}.$$

On voit que la formule $(x^r)'(x_0) = r\,{x_0}^{r-1}$, connue pour r entier, s'applique également pour $r = 1/n$.

Remarque Ce calcul ne s'applique que si $f'(x_0) \neq 0$, c'est à dire pour $x_0 \neq 0$. Même dans le cas n impair, où la fonction g est définie et continue sur $\mathbb{R}$ tout entier, cette fonction n'est pas dérivable en 0 (en fait le taux d'accroissement $\dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \dfrac{g(x)}{x}$ tend vers l'infini quand x tend vers 0). L'hypothèse $f'(x_0) \neq 0$ est bien essentielle dans la Proposition 1.2.4.

On peut aussi, pour tout rationnel p/q ($p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0$), définir la fonction $x^{\frac{p}{q}} = \left(x^{1/q}\right)^p$. Par dérivation des fonctions composées, sa dérivée en un point $x_0 \neq 0$ est

$$(x^{1/q})'\, p\, \left(x^{1/q}\right)^{p-1}_{x=x_0} = \frac{1}{q} {x_0}^{\frac{1}{q}-1}\, p\, \left({x_0}^{1/q}\right)^{p-1} = \frac{p}{q} {x_0}^{\frac{p}{q}-1}.$$

On voir que la formule $(x^r)'(x_0) = r\,(x_0)^{r-1}$ est en fait valable pour tout $r \in \mathbb{Q}$.

1.3 Dérivée à droite, dérivée à gauche

Il peut arriver que le taux d'accroissement $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, bien que n'ayant pas de limite quand $x \to x_0$, ait une limite l_g à gauche (pour $x \underset{<}{\to} x_0$) ; on dit alors que f est **dérivable à gauche** en x_0 . Si ce taux d'accroissement a une limite à droite l_d en x_0 (pour $x \underset{>}{\to} x_0$) on dira que f est **dérivable à droite** en x_0. Les limites l_g et l_d, si elles existent, sont appelées les dérivées (ou parfois demi-dérivées) de f, respectivement à gauche et à droite en x_0, et on les note $f'_g(x_0)$ et $f'_d(x_0)$ respectivement.

Exemple La fonction $f(x) = |x|$ n'est pas dérivable en 0, mais elle admet en 0 une dérivée à gauche, $f'_g(0) = -1$, et une dérivée à droite$f'_d(0) = 1$.

Remarques

1. Si le domaine de définition D_f de f est par exemple un intervalle fermé $[a, b]$ (ou semi-fermé $[a, b[$) on ne peut parler éventuellement en a que de demi-dérivée à droite, et pas de dérivée. De même si par exemple $D_f =]a, b] \cup [c, d[$ $(a < b < c < d)$ on ne pourra parler en b que de dérivée à gauche, et en c que de dérivée à droite, si elles existent.

2. On voit facilement que si f possède en x_0 une dérivée à droite (resp. à gauche) alors en ce point, f est continue à droite (resp. à gauche).

La proposition suivante se montre aisément :

Proposition 1.3.1 *Si f admet en x_0 une dérivée à gauche et une dérivée à droite, alors f est continue en x_0. Si de plus ces deux demi-dérivées sont* de même valeur l, *alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = l$.*

Application Cette propriété est souvent utile pour déterminer la dérivabilité d'une fonction définie par morceaux, aux points de « jonction » des différentes définitions. Soit par exemple f définie par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 1 \\ \dfrac{x^2 + 1}{2} & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Au point 1, la fonction est continue, car elle tend vers 1 des deux côtés, mais elle admet aussi une demi-dérivée à gauche, et une demi-dérivée à droite, toutes les deux égales à 1 : la fonction f est donc dérivable au point 1, avec $f'(1) = 1$.
En revanche la fonction g définie par

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

est continue au point 1, mais non dérivable, car sa dérivée à droite et sa dérivée à gauche n'ont pas la même valeur. On dit dans ce cas que le graphe de g possède un **point anguleux** avec deux demi-tangentes de pente 1 (à gauche) et 2 (à droite).

1.4 Extremum local et dérivée

Soit f une fonction numérique définie sur X, et $x_0 \in X$

Définition 1.4.1 *On dit que f admet en x_0 un* **maximum local** *(resp. un* **minimum local** *) si, pour un certain intervalle $I =]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$ ($\eta > 0$), tel que $I \subset X$, on a*

$$\forall x \in I \quad f(x) \leq f(x_0) \quad (\text{resp. } \forall x \in I \quad f(x) \geq f(x_0)) \ .$$

Dans chacun des deux cas on dit que le point x_0 est un **extremum local** *pour f.*

Si on remplace les inégalités $\leq$ et $\geq$ par des inégalités strictes pour $x \neq x_0$, on obtient les notions de maximum local **strict** , etc.
Exemple La fonction $y = \cos x$ possède en 0 un maximum local strict, puisqu'on a par exemple

$$\forall x \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[\quad x \neq 0 \Rightarrow \cos x < \cos 0,$$

et en π un minimum local strict, puisque

$$\forall x \in]\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}[\quad x \neq \pi \Rightarrow \cos x > \cos \pi.$$

Remarques

1. On ne peut parler d'extremum local en x_0 que si x_0 appartient à *l'intérieur* du domaine de définition D_f de f — c'est à dire, rappelons-le, s'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\subset D_f$. Par exemple, soit la fonction $f(x) = \sqrt{x}$; même si elle atteint sa valeur minimale en 0, on ne dit pas que 0 est un minimum local pour f.

2. La définition, par exemple, d'un maximum local implique que $f(x_0)$ est le maximum des valeurs prises par f *sur l'intervalle I considéré*, mais pas forcément le maximum de *toutes* les valeurs prises par f.
Ainsi la fonction $y = x^3 - x$ possède en $x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ un maximum local, alors que f prend par ailleurs des valeurs bien plus grandes que $f(x_0)$ puisque $f(x) \to +\infty$ quand $x \to +\infty$.

Proposition 1.4.2 *Si x_0 est un extremum local de f et si f est dérivable en x_0, alors nécessairement $f'(x_0) = 0$.*

Preuve Traitons le cas d'un maximum local. D'après les hypothèses, il existe un $\eta > 0$ tel que f soit définie sur $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$, et que

$$\forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\quad f(x) \leq f(x_0).$$

Il en résulte que si $x \in]x_0 - \eta, x_0[$, le taux d'accroissement $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est positif ou nul, donc sa limite quand $x \underset{<}{\to} x_0$ est positive ou nulle : autrement dit $f'_g(x_0) \geq 0$.

D'autre part si $x \in]x_0, x_0 + \eta[$, le taux d'accroissement $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est négatif ou nul, donc sa limite quand $x \underset{>}{\rightarrow} x_0$ est négative ou nulle : autrement dit $f'_d(x_0) \leq 0$.
Mais comme f est dérivable en x_0, $f'_g(x_0) = f'_d(x_0) = f'(x_0)$ et cette valeur ne peut qu'être égale à 0.
Le cas d'un minimum local se traite de façon similaire.

Remarques

1. La réciproque est fausse, c'est à dire qu'une fonction peut posséder une dérivée nulle en un point sans présenter d'extremum local. Penser à l'exemple déjà évoqué de la fonction $y = x^3$ en 0.

2. Si un maximum ou un minimum des valeurs de f est atteint en un point qui n'est *pas intérieur* au domaine de f (par exemple à une extrémité de ce domaine), il n'y a pas extremum local en ce point et on ne peut pas en conclure que la dérivée de f est nulle (d'ailleurs il ne peut exister en un tel point qu'une demi-dérivée).

3. La proposition est évidemment fausse si f n'est pas dérivable en x_0 : ainsi la fonction $y = |x|$ admet un minimum local en 0, mais sa dérivée ne s'annule pas en 0 puisque en ce point la fonction n'est pas dérivable !

2 Fonction dérivée

Etant donné une fonction numérique f, de domaine D_f, son domaine de dérivabilité D'_f est une partie de D_f. On peut considérer la fonction qui à chaque $x \in D'_f$ associe la valeur $f'(x)$: cette fonction est appelée la **fonction dérivée** f' de f.

2.1 Dérivabilité sur un intervalle et dérivées d'ordre supérieur

Définition 2.1.1 *Si $]a, b[$ est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, on dit que f est* **dérivable sur** *$]a, b[$ si cet intervalle est contenu dans le domaine de dérivabilité D'_f de f. Par convention, si $[a, b]$ est un intervalle fermé, tel que $]a, b[\subset D'_f$ et si f admet une dérivée à droite en a et une dérivée à gauche en b, on dira que f est dérivable sur l'intervalle fermé $[a, b]$.*

La fonction f' elle-même peut être dérivable en certains points : la dérivée de f', quand elle existe, est appelée **dérivée seconde**[3] de f et notée f''. La fonction f'' elle-même peut être dérivable, sa dérivée sera appelée dérivée troisième de f et notée f''', etc.
On définit ainsi par récurrence la notion de **dérivée n-ième**, ou **dérivée d'ordre** n, de f, notée $f^{(n)}$. On dit que f est dérivable n fois (en un point, sur un intervalle...) si au(x) point(s) concerné(s) les dérivées $f^{(k)}$ existent pour $k = 1, \ldots, n$.
Pour la cohérence de la notation, on convient que $f^{(0)} = f$.

Exercices

1. Calculer la dérivée n-ième de x^p et de x^{-p} ($p \in \mathbb{N}^*$).

2. Calculer la dérivée n-ième de $\sin x$ et $\cos x$.

[3]De même qu'on peut se représenter physiquement la dérivée au moyen de la notion de vitesse, la dérivée seconde correspond à la notion physique **d'accélération**.

3. Pour quelles valeurs de k la fonction $y = x^p|x|$ ($p \in \mathbb{N}^*$) admet-elle une dérivée k-ième en 0 ?

4. On suppose que f et g admettent des dérivées jusqu'à l'ordre n. Montrer que la dérivée d'ordre n du produit fg existe, sa valeur étant donnée par la formule suivante (*formule de Leibnitz*) :

$$\boxed{(fg)^{(n)} = f^{(n)}g + C_n^1 f^{(n-1)}g' + \cdots + C_n^k f^{(n-k)}g^{(k)} + \cdots + fg^{(n)}}$$

(on procédera par récurrence sur n).

2.2 Théorème de Rolle et accroissements finis

Théorème 2.2.1 (Théorème de Rolle) *Soit f une fonction numérique définie et continue sur un intervalle fermé $[a, b]$, et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$. Si $f(a) = f(b)$, il existe un point $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Preuve D'après la Proposition 1.4.2 il suffit de montrer qu'il existe au moins un point $c \in]a, b[$ qui est un extrêmum local pour f. Or 3 cas seulement peuvent se présenter :

- Ou bien pour tout $x \in]a, b[$ on a $f(x) = f(a)$; alors la fonction f est constante sur l'intervalle, et on a bien $f'(c) = 0$ pour tous les c tels que $a < c < b$ (ces points sont des extrema locaux... au sens large).
- Ou bien il existe $x \in]a, b[$ tel que $f(x) > f(a)$; f étant continue sur $[a, b]$, elle atteint sur cette intervalle une valeur maximale en un point $c \in [a, b]$ (voir chapitre précédent). Mais comme la valeur $f(a) = f(b)$ n'est pas maximale, on a forcément $c \in]a, b[$, et c est un maximum local pour f. Donc $f'(c) = 0$.
- Ou bien il existe $x \in]a, b[$ tel que $f(x) < f(a)$, et on en déduit de façon analogue l'existence d'un minimum local $c \in]a, b[$.

Dans chaque cas, il existe au moins un point situé strictement entre a et b, en lequel la dérivée s'annule.

Interprétation graphique Ce théorème peut s'interpréter ainsi pour le graphe d'une fonction dérivable : si deux points distincts A et B du graphe ont même ordonnée, il existe entre A et B un point C où la tangente au graphe est horizontale. Notons que dans ce cas la tangente en C est parallèle à la “corde” AB. Cette propriété n'est pas réservée à la direction horizontale, comme le montre le très important théorème suivant :

Théorème 2.2.2 (Théorème des accroissements finis) *Soit f une fonction numérique définie et continue sur un intervalle fermé $[a, b]$, et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$. Alors il existe un point $c \in]a, b[$ tels que $f'(c)$ soit égal au taux d'accroissement de f entre a et b ; autrement dit tel que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Interprétation graphique Ce théorème peut s'interpréter ainsi pour le graphe d'une fonction dérivable : pour deux points distincts A et B du graphe il existe entre ces deux points un point C en lequel la tangente au graphe est parallèle à la corde AB.

Preuve du théorème Considérons les deux points situés sur le graphe de f, $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$. Soit $\varphi(x)$ la fonction qui donne l'écart vertical entre le graphe de f et la corde AB aux points d'abscisse x. Cette fonction s'écrit

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - (x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

On vérifie que la fonction φ satisfait les hypothèses du théorème de Rolle entre a et b (elle est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, et elle s'annule en a et b). Il existe donc $c \in]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$. Or

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

donc $\varphi'(c) = 0$ est équivalent à $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Remarque Le Théorème de Rolle est un cas particulier du Théorème des accroissements finis, la corde AB étant horizontale. Cependant il est plus commode pour la démonstration d'énoncer et de démontrer d'abord le Théorème de Rolle.

Interprétation physique En interprétant la dérivée de f comme la vitesse d'un véhicule, dont la distance au point de départ est donnée en fonction du temps par $f(t)$, le theorème des accroissements finis peut s'interpréter par des affirmations du type " Si un véhicule a parcouru 100 km en 1 heure en roulant sans arrèt, il y a forcément un moment au cours de cette heure où il a fait du 100 km/h".

Autre formulation du théorème des accroissements finis

L'égalité énoncée dans le théorème ci-dessus, peut aussi s'écrire

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(c). \qquad (2.2.2.1)$$

Si on pose $h = b - a$, on a alors $b = a + h$ et tout point c strictement entre a et $b = a + h$ peut alors s'écrire sous la forme $a + \theta h$, avec $\theta \in]0, 1[$.
L'égalité ci-dessus devient alors

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a+\theta h). \qquad (2.2.2.2)$$

Le théorème peut s'énoncer en écrivant que *si f est continue sur $[a, a+h]$ et dérivable sur $]a, a+h[$, il existe un $\theta \in]0, 1[$ vérifiant l'égalité 2.2.2.2.*

Remarquons que cette formule est également vraie pour $h < 0$ (on l'obtient alors en appliquant le Théorème 2.2.2 à l'intervalle $[a + h, a]$).

Remarque On comparera avec l'énoncé de la Proposition 1.1.2 : dans cette proposition on décrivait ce qui se passe quand h tend vers 0. Ici ce n'est pas le cas : h est un accroissement non nul "fixé"[4], et le théorème décrit ce qui se passe entre a et $a+h$, même si h est "grand".

[4] Ou, comme on disait au 18e siècle, un accroissement "fini", par opposition aux accroissements "infiniment petits" intervenant dans la dérivation telle qu'on la concevait alors.

Proposition 2.2.3 - Limite de nombres dérivés - *Soit f continue sur $[x_0, b]$, dérivable sur $]x_0, b[$. Si $f'(x)$ tend vers une limite à droite δ quand $x \underset{>}{\rightarrow} x_0$ alors f admet en x_0 une dérivée à droite égale à δ.*

Preuve - Exercice : En appliquant le théorème des accroissements finis sur $[x_0, x]$, montrer que f admet en x_0 une dérivée à droite égale à δ.

On a bien entendu un énoncé similaire si l'on considère un intervalle de la forme $[a, x_0]$ et la limite de $f'(x)$ à gauche en x_0. Cette proposition est très utilisée en pratique en particulier pour étudier les pentes des demi-tangentes aux extrémités. En voici deux exemples.

1. Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln x$ si $x \in]0, 1[$, $f(x) = \exp(x - 1)$ si $x \geq 1$. Cette fonction est-elle continue en 1? dérivable en 1 ?

2. Représenter graphiquement au voisinage de 0^+, $f(x) = \cos(\sqrt{x})$.

Remarque En revanche, la dérivée en un point point a peut exister sans que la limite de $f'(x)$ existe pour $x \to a$: montrer que c'est le cas en 0 pour la fonction définie par $f(0) = 0$, et $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$.

2.3 Application à la variation des fonctions

Proposition 2.3.1 *Si f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ et si pour tout $x \in]a, b[$, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur $[a, b]$.*

Preuve Soit x tel que $a < x \leq b$, la fonction f satisfait les hypothèses du Théorème 2.2.2 entre a et x. Il existe alors $c \in]a, x[$ tel que $f(x) = f(a) + (x - a)f'(c)$, mais comme par hypothèse $f'(c) = 0$, il en résulte que $f(x) = f(a)$.

Proposition 2.3.2 *Si f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, et si pour tout $x \in]a, b[$, $f'(x) > 0$ (resp. $f'(x) < 0$) alors f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur $[a, b]$.*

Preuve Supposons par exemple que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]a, b[$. Soient x et y appartenant à $[a, b]$, avec $x < y$: alors le taux d'accroissement de f entre x et y est égal à la valeur de f' en un point c entre x et y, donc ce taux est positif strictement, ce qui veut dire que $f(x) < f(y)$. La fonction f est donc strictement croissante sur $[a, b]$.

Remarque Il faut voir que pour les deux énoncés précédents la continuité sur le fermé $[a, b]$ et le signe de la dérivée seulement sur l'ouvert $]a, b[$ permettent de conclure à la variation de f sur le fermé $[a, b]$. Par exemple la fonction $f(x) = x^3$ est continue sur $[0, 1]$ et de dérivée $f'(x) = 3x^2$ strictement positive sur l'ouvert $]0, 1[$, f est donc strictement croissante sur $[0, 1]$ bien que sur $[0, 1]$, $f'(x) \geq 0$.

On démontre de même mais de résultat moins intéressant

Proposition 2.3.3 *Si f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, et si pour tout $x \in]a, b[$, $f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) \leq 0$) alors f est croissante (resp. décroissante) sur $[a, b]$.*

2.4 Application à des inégalités et encadrements

La proposition suivante est aussi appelée **inégalité des accroissements finis**. Elle sert aussi souvent, voire plus, que le théorème lui-même :

Proposition 2.4.1 *Soit f continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. S'il existe une constante $M \geq 0$ telle que*

$$\forall x \in]a,b[\quad |f'(x)| \leq M,$$

alors on a l'inégalité

$$\forall x, y \in \ [a,b] \quad |f(x) - f(y)| \leq M\,|x-y|.$$

La preuve suit le même schéma que celle des propositions précédentes. On la laisse en exercice.

On peut aussi énoncer un résultat analogue qui permet de faire des encadrements :

Proposition 2.4.2 *Soit f continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. S'il existe deux constantes m et M telles que*

$$\forall x \in]a,b[\quad m \leq f'(x) \leq M,$$

alors on aura l'inégalité

$$\forall h \quad 0 < h < b-a \ \Rightarrow\ f(a) + mh \leq f(a+h) \leq f(a) + Mh$$

Exercices

1. Montrer que si $h > 0$ on a $\dfrac{1}{2} - \dfrac{h}{4} < \dfrac{1}{2+h} < \dfrac{1}{2}$.
2. On se donne une valeur approchée de $\ln 2$ à 10^{-6} près, soit $\ln 2 \simeq 0,693147$. En utilisant l'inégalité démontrée à la première question, donner un encadrement aussi précis que possible de $\ln(2,002)$.

3 Exercices

3.1 Calculer les dérivées des fonctions suivantes (en précisant le domaine de dérivation) :

$$f(x) = (2x-3)^5 \sqrt[5]{(x-1)^3}, \quad g(x) = \frac{\cos x + x \sin x}{\sin x - x\cos x}$$

$$h(x) = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}}, \quad k(x) = \cos(\sin(x + \sqrt{x})).$$

3.2 Raccordement dérivable

1. Trouver une fonction polynomiale f de degré 2 telle que $f(-1) = 1$, $f(1) = 2$ et $f(2) = 3$.

2. On définit la fonction
$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \leq 2 \\ g(x) & \text{si } x > 2, \end{cases}$$
où f est la fonction définie à la $1^{\text{ère}}$ question, et g est aussi une certaine fonction polynomiale de degré 2. Déterminer g de façon que F soit dérivable et que $F(3) = 1$. Dessiner le graphe de la fonction F ainsi obtenue.
Dessiner aussi le graphe de F'. La fonction F admet-elle une dérivée seconde ?

3.3 Dérivée logarithmique Pour toute fonction numérique f dérivable, on notera ici $\delta f = \dfrac{f'}{f}$ la dérivée logarithmique de f (quand elle existe). Soient deux fonctions f et g dérivables sur un même intervalle I.

1. Supposons que f et g ne s'annulent pas sur I. Si $\delta f = \delta g$, quelle relation existe-t-il entre f et g ?
2. Montrer que $\delta(fg) = \delta f + \delta g$ et que, pour tout $p \in \mathbb{Q}$, quand f^p est définie on a $\delta(f^p) = p \cdot \delta f$.
3. Utiliser ces propriétés pour calculer la dérivée des fonctions suivantes :
$$f(x) = (x+1)^4 \frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{(x-1)^5}, \qquad g(x) = \frac{(a+x)^p}{(b+x)^q(c+x)^r} \quad (a, b, c \in \mathbb{R},\ p, q, r \in \mathbb{Q})$$
(on pourra aussi recalculer la dérivée de la fonction f du premier exercice).

3.4 Calculer la dérivée n-ième des fonctions suivantes :
$$f(x) = \frac{1-x}{1+x}, \quad g(x) = \frac{3x+2}{x^2-4}, \quad h(x) = \sin^2 x, \quad k(x) = \cos 3x.$$

3.5 En appliquant la formule de Leibnitz (voir Exercices page 79), calculer la dérivée n-ième de $f(x) = x^2 e^x$ et de $g(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

3.6 Soit $f(x) = x^3 + x + 1$. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Soit φ sa fonction réciproque. Montrer que φ est dérivable, et vérifie l'égalité
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \varphi'(x) = \frac{1}{1 + 3\varphi(x)^2}.$$

3.7 Soit $f(x) = x^3$, et soit a un réel positif. Pour tout $h > 0$ appelons $\theta(h)$ la valeur de $\theta \in]0, 1[$ telle que
$$f(a+h) = f(a) + h\, f'(a + \theta h).$$
Expliquer pourquoi cette valeur est unique. Calculer la limite de $\theta(h)$ quand $h \to 0$.

Plus généralement, faire la même étude pour $f(x) = x^n$ $(n \geq 2)$. Que peut-on dire pour $n = 2$?

3.8 Soit $f(x) = \ln(\ln x)$.

1. Donner le domaine de définition de f. Calculer f' et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$ on a

$$\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} < f(n+1) - f(n) < \frac{1}{n\,\ln n}.$$

3. En déduire la limite de la suite définie pour $n \geq 2$ par

$$S_n = 1 + \frac{1}{2\ln 2} + \frac{1}{3\ln 3} + \cdots + \frac{1}{n\,\ln n}.$$

3.9 Montrer que pour $h \in [0, \frac{\pi}{6}]$ on a

$$\frac{\sqrt{3}}{2} < \sin\left(\frac{\pi}{3} + h\right) < \frac{\sqrt{3}}{2} + h.$$

En déduire que, pour les mêmes valeurs de h, on a

$$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}h - h^2 < \cos\left(\frac{\pi}{3} + h\right) < \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}h.$$

3.10 Soit $f(x) = \sqrt{x}$.

1. Montrer que pour tout réel x tel que $4 < x < 4{,}01$ on a $2 < f(x) < 2{,}0025$.

2. En déduire un encadrement des valeurs de $f'(x)$ pour $x \in]4\,,\,4{,}01[$. Donner alors un encadrement de $\sqrt{4{,}01}$ à 10^{-5} près.

3.11 Soit $f(x) = \dfrac{\sin(x^2)}{x}$ (définie pour $x > 0$).

1. Montrer que quand $x \to +\infty$, $f(x) \to 0$ mais $f'(x)$ ne tend pas vers 0.

2. Soit f dérivable sur $\mathbb{R}^+$; on suppose que $f(x)$ et $f'(x)$ ont des limites finies l et l' quand $x \to +\infty$. Montrer que nécessairement $l' = 0$ (**Aide :** supposer que, par exemple, $l' > 0$; montrer qu' il existe A tel que $x > A \Rightarrow f'(x) > l/2$ et en déduire qu'on a forcément $f(x) \to +\infty$ quand $x \to +\infty$).

3.12 Convexité

1. Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle $[a, b]$ $(a < b)$. On pose $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(B))$.
   Montrer que le graphe de f est en-dessous de la corde AB pour $x \in [a, b]$ si et seulement si on a
   $$(\forall t \in]0, 1[\,) \quad f(ta + (1-t)b) \leq t\, f(a) + (1-t)\, f(b). \qquad (1)$$
   Montrer que cette propriété est équivalente à la suivante :
   pour tout $x \in]a, b[$, si $M = (x, f(x))$, la pente de AM est inférieure ou égale à celle de MB.

2. On dit qu'une fonction numérique f est **convexe** sur un intervalle I si, pour tous réels $a, b \in I$ tels que $a < b$, la condition (1) ci-dessus est vérifiée. On dit qu'elle est **concave** si pour $a, b \in I$ $(a < b)$ on a
   $$(\forall t \in]0, 1[\,) \quad f(ta + (1-t)b) \geq t\, f(a) + (1-t)\, f(b).$$
   (a) On suppose que f admet une dérivée seconde sur I. Montrer que si $\forall x \in I$ $f''(x) \geq 0$, f est convexe sur I, et que si $\forall x \in I$ $f''(x) \leq 0$, f est concave sur I.
   (b) On suppose que f est convexe et admet une dérivée seconde *continue* sur I. Montrer alors que $\forall x \in I$ $f''(x) \geq 0$ (sinon, il existe un intervalle ouvert non vide sur lequel on a $f''(x) < 0 \ldots$).

3.13 Ecart entre le graphe et la corde

1. Soit $]a, b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$, et f une fonction deux fois dérivable sur $[a, b]$. On suppose que f s'annule en a, en b, et en un point $c \in]a, b[$. Montrer qu'il existe $d \in]a, b[$ tel que $f''(d) = 0$.

2. Soit φ une fonction 2 fois dérivable sur $[a, b]$, telle que $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. On suppose que $|\varphi''(x)|$ est majoré sur $]a, b[$ par une constante $M > 0$.
   (a) Soit x_0 un point donné de $]a, b[$. On note $\pi(x) = C(x-a)\,(x-b)$. Montrer qu'on peut choisir C de façon que $\pi(x_0) = \varphi(x_0)$.
   La constante C étant ainsi choisie, montrer que la dérivée seconde de $\pi - \varphi$ s'annule au moins une fois sur $]a, b[$. En déduire que
   $$|\varphi(x_0)| \leq \frac{M}{2}\,(x_0 - a)\,(x_0 - b).$$
   (b) Montrer que
   $$\forall x \in [a, b] \quad |\varphi(x)| \leq \frac{M}{8}\,(b-a)^2.$$

3. Soit maintenant f deux fois dérivable sur $[a, b]$ et telle que $|f''(x)| \leq M$ pour tout $x \in]a, b[$.
   Si $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$, soit $\varphi(x)$ l'écart vertical entre le graphe de f et la corde AB, aux points d'abscisse x. Montrer que $\quad \forall x \in [a, b] \quad |\varphi(x)| \leq \dfrac{M}{8}\,(b-a)^2$.

4. Exemple numérique : soit $f(x) = \ln x$. Majorer l'écart vertical entre le graphe de f et la corde joignant les points du graphe d'abscisses 10 et 11.