Chapitre 8

Courbes

1 Courbes y=f(x)

1.1 Graphe

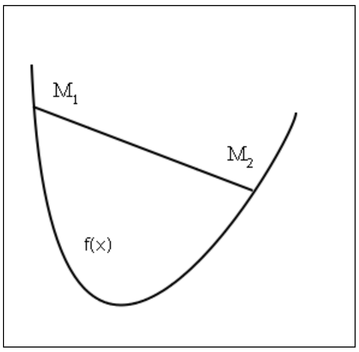
Soit $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R} \to R$, une fonction définie sur un domaine $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$.
Un repère orthonormé étant choisi dans le plan, on appelle courbe représentative de f, ou encore graphe de f, l'ensemble des points du plan de coordonnées $(x, f(x)),\ x \in \mathcal{D}$.

1.2 Convexité

Soit $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to R$ une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$.
On dit que f est convexe sur $[a, b]$ "de concavité tournée vers les y positifs ", si pour tout couple de points M_1, M_2 de la courbe représentative de f, le segment M_1M_2 ("la corde") est entièrement situé au dessus de la courbe.
En formule:

$$\boxed{f[x_1 + t(x_2 - x_1)] \leqslant f(x_1) + t[f(x_2) - f(x_1)] \quad \forall t \in [0, 1],\ \forall x_1, x_2 \in [a, b]}$$

De même, on dit que f est concave sur $[a, b]$ "de concavité tournée vers les y négatifs ", si pour tout couple de points M_1, M_2 de la courbe représentative de f, le segment M_1M_2 ("la corde") est entièrement situé au dessous de la courbe.



Une courbe convexe et une corde

Théorème 1.2.1 *Si f admet une dérivee seconde f'' partout positive sur $[a, b]$, alors f est convexe sur $[a, b]$*

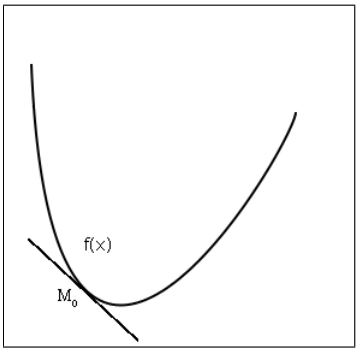
<u>Dem</u>: ►Soient x_1 et x_2 les abscisses des points M_1 et M_2 et soit $y = mx + p$ l'équation de la droite M_1M_2. La quantité $\varphi(x) = f(x) - (mx + p)$ mesurant la différence des ordonnées d'un point de la courbe et d'un point de la droite de même abscisse x , vérifie:

$$\varphi'(x) = f'(x) - m \text{ donc } \varphi''(x) = f''(x) > 0.$$

φ' est donc croissante sur $[a, b]$. D'autre part puisque $\varphi(x_1) = \varphi(x_2) = 0$, il existe $c \in [x_1, x_2]$ tel que $\varphi'(c) = 0$ (Th de Rolle). Ainsi $\varphi'(x) \leqslant 0$ pour $x \in [x_1, c]$ et $\varphi'(x) \geqslant 0$ pour $x \in [c, x_2]$, et donc φ est décroissante sur $[x_1, c]$ et croissante sur $[c, x_2]$.
Finalement $\varphi(x) \leqslant 0$ sur l'intervalle $[x_1, x_2]$, ce qui signifie bien que la corde M_1M_2 est située au-dessus de la courbe

x	x_1		c		x_2
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$	0	$\searrow$		$\nearrow$	0

◄



La même et une tangente

Théorème 1.2.2 *Si f admet une dérivee seconde f'' partout positive sur $[a, b]$, alors pour tout point M_0 d'abscisse x_0,*
$x_0 \in [a, b]$, la courbe est toute entière située au dessus de sa tangente en M_0.

<u>Dem</u>: ►Soit $t(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$ l'équation de la tangente en M_0 et $h(x) = f(x) - t(x)$ la fonction mesurant la différence des ordonnées entre un point de la courbe et un point de cette tangente, de même abscisse x. On a pour tout x dans l'intervalle $[a, b]$

$$h'(x) = f'(x) - f'(x_0) \quad \text{et} \quad h''(x) = f''(x) > 0 \ .$$

Par conséquent, la fonction h' est croissante, et comme $h'(x_0) = 0$, on a $h'(x) < 0$ si $x < x_0$, et $h'(x) > 0$, si $x > x_0$. La fonction h est décroissante sur $[a, x_0]$, et croissante sur $[x_0, b]$; elle admet donc son minimum en x_0, et comme $h(x_0) = 0$, on a $h(x) \geq 0$ pour tout x dans $[a, b]$.

Remarque. Le théorème précédent permet de dire que le graphe d'une fonction f est au-dessus de sa tangente au voisinage d'un point x_0 dans le cas où f est deux fois dérivable avec f'' continue, et $f''(x_0) > 0$. En effet, il suffit dans ce cas d'appliquer le théorème 1.2.2 à la fonction f sur un intervalle de la forme $I = [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ avec $\varepsilon > 0$ assez petit (car f'' étant continue, pour ε assez petit, on a $f''(x) > 0$ pour tout x dans I).

Exercice 1.2.3 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \left(x^3 + 6x^2 - 5\right)^{\frac{1}{3}}$. Écrire l'équation de la tangente de la courbe de f au point d'abscisse 2, et trouver la position du graphe de f par rapport à cette tangente au voisinage de 2.

Remarque. Les théorèmes 1.2.1 et 1.2.2 se traduisent immédiatement en termes de concavité et de dérivée seconde négative.

1.3 Extremum

On appelle <u>extremum</u> (local) de f un maximum (local) ou un minimum (local) de la fonction f.
Autrement dit, c'est un point x_0 tel qu'il existe un intervalle $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ sur lequel $f(x_0)$ est le maximum ou le minimum de la fonction f.
On sait qu'en un tel point la dérivée $f'(x_0)$ est nulle, et que la tangente est donc horizontale.
• *1er cas:* $f''(x_0) \neq 0$

Il résulte alors immédiatement du Théorème 1.2.1 que:

$$\boxed{\begin{array}{l} \bullet \text{ si } f''(x_0) > 0 \text{ il s'agit d'un minimum (local)} \\ \bullet \text{ si } f''(x_0) < 0 \text{ il s'agit d'un maximum (local)} \end{array}}$$

• *2ème cas:* $f''(x_0) = 0$

Supposons alors f suffisament dérivable et soit $f^{(p)}(x_0)$, $p \geqslant 3$,sa première dérivée d'ordre supérieur non nulle en x_0.
Un développement limité de f en x_0 à l'ordre p s'écrit:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{(x - x_0)^p}{p!} f^{(p)}(x_0) + (x - x_0)^p \varepsilon(x - x_0) \quad \text{où } \varepsilon(x - x_0) \text{ tend vers 0 quand } x \to x_0$$

ou encore:

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)^p \left[\frac{f^{(p)}(x_0)}{p!} + \varepsilon(x - x_0)\right]$$

et en remarquant que le crochet garde un signe constant pour $x - x_0$ suffisament petit, on voit que:
1) si p est impair $f(x) - f(x_0)$ change de signe selon que x est à droite ou à gauche de x_0 et la courbe traverse sa tangente (horizontale): x_0 n'est PAS un extremum (local)
2) si p est pair $f(x) - f(x_0)$ garde le même signe pour x à droite et à gauche de x_0: x_0 est un extremum (local) ("point méplat"):

• c'est un minimum si $f^{(p)}(x_0) > 0$

• c'est un maximum si $f^{(p)}(x_0) < 0$

Exercice 1.3.1 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par $f(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2$. Trouver les extrema locaux et globaux sur $\mathbb{R}$, préciser leur nature, et tracer le graphe de f.

1.4 Point d'inflexion

Plus généralement , on appelle point d'inflexion d'une courbe d'une fonction f, un point d'abscisse x_0 où la courbe traverse sa tangente, ce qui signifie que la fonction

$$h(x) = f(x) - [(f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)]$$

change de signe au point x_0.
Supposons la courbe f deux fois dérivable au point x_0.

La condition $f''(x_0) = 0$ est nécessaire pour que x_0 soit un point d'inflexion.

En effet, supposons pour fixer les idées que $f''(x_0) > 0$. Alors on a

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) - (x - x_0)f'(x_0) &= \frac{(x - x_0)^2}{2} f''(x_0) + (x - x_0)^2 \varepsilon(x - x_0) \\ &= \frac{(x - x_0)^2}{2} [f''(x_0) + \varepsilon(x - x_0)] > 0 \end{aligned}$$

pour tout x tel que $|x - x_0|$ soit suffisament petit, puisque $f''(x_0) > 0$. La courbe de f reste donc au-dessus de sa tangente au voisinage de x_0. Le raisonnement est identique si $f''(x_0) < 0$.
Cherchons une condition suffisante pour qu'une fonction f admette un point d'inflexion en x_0. Supposons f trois fois dérivable au point x_0, et vérifiant les conditions

$$f''(x_0) = 0 \quad \text{et} \quad f'''(x_0) \neq 0 \ .$$

Le développement limité de f à l'ordre 3 au point x_0 est :

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)^3 [\frac{f'''(x_0)}{6} + \varepsilon(x - x_0)] \ .$$

La fonction $(x - x_0)^3 f'''(x_0)$ change de signe en x_0, ce qui implique qu'il en va de même de la fonction $f(x) - [f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)]$. La courbe de f traverse donc sa tangente au point x_0. En résumé:

Les conditions $f''(x_0) = 0$ et $f'''(x_0) \neq 0$ sont suffisantes pour avoir un point d'inflexion en x_0.

Exercice 1.4.1 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 8x - 1$. Trouver ses points d'inflexion.

1.5 Rappels sur les discontinuités de la dérivée

Dans le cas où la fonction f n'est PAS dérivable en un point x_0 :
• si elle admet cependant une dérivée à droite et/ou une dérivée à gauche (distincte) : il y a une (ou deux) demi-tangentes en x_0.
• si $f'(x_0)$ tend vers l'infini lorsque x tend vers x_0 : il y a une tangente verticale en x_0

1.6 Pratique de l'étude d'une courbe plane donnée par une équation y=f(x)

1) Recherche des intervalles de définition.

2) Réduction des intervalles par des considérations de parité, périodicité,etc...

3) Continuité sur chaque intervalle réduit. Valeurs aux bornes. Prolongements éventuels par continuité.

4) Décomposition de chaque intervalle en sous-intervalles de monotonie, grâce aux théorèmes liant le sens de variation au signe de la dérivée. Valeurs aux bornes de ces sous-intervalles. Branches infinies et asymptotes.

5) Consignation de ces résultats dans un "tableau des variations" et tracé de la courbe.

Recherche des branches infinies:

On dit qu'une courbe possède une branche infinie si la distance de l'origine O à un point M de cette courbe peut devenir aussi grande que l'on veut ("OM tend vers l'infini")
Ceci peut avoir lieu dans les situations suivantes:
a) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ "asymptote verticale d'équation $x = a$ "
b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l$ "asymptote horizontale d'équation $y = l$ "
c) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$:

Dans ce cas on étudie $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ comme suit :

• si $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = m$ *et* $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - mx] = p$ "asymptote oblique d'équation $y = mx + p$ "
• si $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = m$ *et* $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - mx] = \infty$ "branche parabolique de direction $y = mx$ "
• si $\dfrac{f(x)}{x} \to \infty$ quand $x \to \infty$ "branche parabolique de direction Oy "

On notera que dans la situation d'une branche parabolique , la courbe ne se rapproche PAS d'une droite fixe, contrairement à ce qui se passe lorsqu'elle admet une asymptote.

Enfin, s'il existe une courbe d'équation $y = g(x)$ telle que $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - g(x)) = 0$, on dit que g est une "courbe asymptote pour f " : la courbe d'équation $y = f(x)$ se rapproche indéfiniment d'une autre courbe d'équation $y = g(x)$.

Recherche des asymptotes obliques et position de la courbe par rapport aux asymptotes:

La recherche des asymptotes obliques se fait à l'aide d'un développement limité pour $x \to \infty$; un tel développement s'obtient en posant $X = \frac{1}{x}$ et en effectuant un développement limité en $X = 0$ avant de revenir à la variable $x = \frac{1}{X}$; si ce développement limité s'écrit

$$\boxed{f(x) = mx + p + \frac{a_k}{x^k} + \frac{1}{x^k}\varepsilon(\frac{1}{x})}$$

où a_k est le premier terme non nul contenant x au dénominateur, l'asymptote est clairement la droite d'équation $y = mx + p$.

De plus le signe de a_k nous donne la position de la courbe par rapport à cette asymptote (à l'infini):

$$\bullet \text{ si } a_k > 0 \text{ et } \begin{cases} k \text{ pair: courbe au-dessus de l'asymptote en } \pm\infty \\ k \text{ impair: courbe au-dessus de l'asymptote en } +\infty, \text{ en dessous en } -\infty \end{cases}$$

$$\bullet \text{ si } a_k < 0 \text{ et } \begin{cases} k \text{ pair: courbe en dessous de l'asymptote en } \pm\infty \\ k \text{ impair: courbe en dessous de l'asymptote en } +\infty, \text{ au-dessus en } -\infty \end{cases}$$

2 Courbes paramétrées

2.1 Préliminaire: fonctions vectorielles $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

1) Définitions.

Si $x(t)$ et $y(t)$ sont deux fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la fonction $\overrightarrow{F}$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par $\overrightarrow{F}(t) = (\,x(t),y(t)\,)$ est appelée fonction vectorielle. Les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ sont les coordonnées de $\overrightarrow{F}(t)$.

2) Limites – continuité – dérivées successives

• Si $x(t)$ et $y(t)$ admettent des limites respectives α et β lorsque $t \to t_0$, on dit que la fonction $\overrightarrow{F}(t)$ admet pour limite $(\,\alpha, \beta\,)$ lorsque $t \to t_0$.

• Si $x(t)$ et $y(t)$ sont continues au point t_0, on dit que la fonction $\overrightarrow{F}(t)$ est continue en t_0.

• Si $x(t)$ et $y(t)$ sont dérivables n fois au point t_0, on dit que la fonction $\overrightarrow{F}(t)$ est dérivable n fois en t_0, et $\left(\,x^{(n)}(t_0), y^{(n)}(t_0)\,\right)$ est noté $\overrightarrow{F^{(n)}}(t_0)$

3) Formule de Taylor-Young au voisinage de t_0.

Si $\overrightarrow{F}(t)$ est $n+1$ fois dérivable en t_0, et si $\overrightarrow{F^{(n+1)}}(t)$ est continue au voisinage de t_0, on peut appliquer la formule de Taylor-Young aux fonctions $x(t)$ et $y(t)$:

$$\begin{aligned} x(t_0+h) &= x(t_0) + h\,x'(t_0) + ... + \frac{h^n}{n!}\,x^{(n)}(t_0) + h^n\,\varepsilon_1(h) \\ y(t_0+h) &= y(t_0) + h\,y'(t_0) + ... + \frac{h^n}{n!}\,y^{(n)}(t_0) + h^n\,\varepsilon_2(h) \end{aligned}$$

En posant $\overrightarrow{\varepsilon}(h) = (\,\varepsilon_1(h), \varepsilon_2(h)\,)$, la fonction vectorielle $\overrightarrow{\varepsilon}(h)$ tend vers 0 lorsque h tend vers 0, et on peut écrire:

$$\boxed{\overrightarrow{F}(t_0+h) = \overrightarrow{F}(t_0) + h\,\overrightarrow{F'}(t_0) + ... + \frac{h^n}{n!}\,\overrightarrow{F^{(n)}}(t_0) + h^n\,\overrightarrow{\varepsilon}(h)}$$

Cette formule est appelée formule de Taylor-Young appliquée à la fonction vectorielle $\overrightarrow{F}(t)$.

2.2 Courbes paramétrées

1) Définition.

Le plan étant muni d'un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, pour toute fonction vectorielle $\overrightarrow{F(t)} = (\,x(t), y(t)\,)$, l'ensemble des points $M(t)$ du plan tels que $\overrightarrow{OM(t)} = (\,x(t), y(t)\,)$ est appelé courbe paramétrée d'équations $x = x(t)$, $y = y(t)$.

- Remarque: si t est interprété comme la variable temps, on peut considérer la courbe paramétrée comme la trajectoire du point $M(t)$.

2) Allure de la courbe au voisinage d'un point à distance finie.

On suppose que la fonction $\overrightarrow{F}(t)$ est dérivable autant de fois que nécessaire au voisinage

de t_0.
En notant M_0 le point défini par $\overrightarrow{OM_0} = \overrightarrow{F}(t_0)$, et M le point défini par $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{F}(t_0+h)$, la formule de Taylor-Young s'écrit

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + h\,\overrightarrow{F'}(t_0) + ... + \frac{h^n}{n!}\,\overrightarrow{F^{(n)}}(t_0) + h^n\,\overrightarrow{\varepsilon}(h), \text{ ou encore:}$$
$$\overrightarrow{M_0M} = h\,\overrightarrow{F'}(t_0) + ... + \tfrac{h^n}{n!}\,\overrightarrow{F^{(n)}}(t_0) + h^n\,\overrightarrow{\varepsilon}(h) \qquad (\ \Xi\ )$$

Deux cas se présentent alors:
♦**1**^{er} **cas**: $\overrightarrow{F'}(t_0) \neq 0$. On dit que M_0 est un point régulier.

a) Recherche de la tangente en M_0.
On note q le plus petit entier supérieur à 1, tel que $\overrightarrow{F^{(q)}}(t_0)$ ne soit pas colinéaire à $\overrightarrow{F'}(t_0)$. En posant $\overrightarrow{V_1} = \overrightarrow{F'}(t_0)$ et $\overrightarrow{V_2} = \overrightarrow{F^{(q)}}(t_0)$, on obtient un nouveau repère (non orthonormé) du plan: $\left(M_0, \overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}\right)$. En notant $\eta_1(h)$ et $\eta_2(h)$ les coordonnées de $\overrightarrow{\varepsilon}(h)$ dans ce nouveau repère, et k_i le coefficient de proportionnalité des vecteurs $\overrightarrow{F^{(i)}}(t_0)$ et $\overrightarrow{F'}(t_0)$ pour $i = 2, ..., (q-1)$, la relation (Ξ) s'écrit :

$$\overrightarrow{M_0M} = \left(h + \frac{h^2}{2!}k_2 + ... + \frac{h^{q-1}}{(q-1)!}k_{q-1} + h^q\eta_1(h)\right)\ \overrightarrow{V_1} + \left(\frac{h^q}{q!} + h^q\eta_2(h)\right)\ \overrightarrow{V_2}$$

et les coordonnées de M dans le nouveau repère sont:

$$X = \left(h + \frac{h^2}{2!}k_2 + ... + \frac{h^{q-1}}{(q-1)!}k_{q-1} + h^q\eta_1(h)\right) \text{ et } Y = \left(\frac{h^q}{q!} + h^q\eta_2(h)\right).$$

Dans le nouveau repère, la pente de la tangente à la courbe, au point M_0, est donnée par la limite de $\dfrac{Y}{X}$ lorsque $h \to 0$, c'est-à-dire 0. La tangente est donc portée par $\overline{V_1}$, d'où le résultat:

En un point régulier, la tangente à la courbe, au point M_0, est portée par le vecteur $\overrightarrow{F'}(t_0) = (\,x'(t_0), y'(t_0))$, et la pente de cette tangente est $\dfrac{y'(t_0)}{x'(t_0)}$.

b) Allure de la courbe:
Lorsque h est voisin de 0, le signe de X est celui de h, et le signe de Y est celui de h^q , par conséquent:

• Si q est pair, on dit que M_0 est un point ordinaire.
• Si q est impair, on dit que M_0 est un point d'inflexion.

Exercice 2.2.1 *a)* On pose $F(t) = (t, 2t + t^2)$. Vérifier que 0 est un point ordinaire.
b) On pose $F = (t, 2t + t^3)$. Vérifier que 0 est un point d'inflexion.

♦**2**^{ème} **cas:** $\overrightarrow{F'}(t_0)=0$. On dit que M_0 est un point stationnaire.

a) Recherche de la tangente

On note p le plus petit entier tel que $\overrightarrow{F^{(p)}}(t_0)\neq 0$ et q le plus petit entier supérieur à p, tel que $\overrightarrow{F^{(q)}}(t_0)$ ne soit pas colinéaire à $\overrightarrow{F^{(p)}}(t_0)$. En posant $\overrightarrow{V_1}=\overrightarrow{F^{(p)}}(t_0)$ et $\overrightarrow{V_2}=\overrightarrow{F^{(q)}}(t_0)$, on obtient un nouveau repère (non orthonormé) du plan: $\left(M_0,\overrightarrow{V_1},\overrightarrow{V_2}\right)$. En notant $\eta_1(h)$ et $\eta_2(h)$ les coordonnées de $\overrightarrow{\varepsilon}(h)$ dans ce nouveau repère, et k_i le coefficient de proportionnalité des vecteurs $\overrightarrow{F^{(i)}}(t_0)$ et $\overrightarrow{F^{(p)}}(t_0)$ pour $i=(p+1),...,(q-1)$, la relation (Ξ) s'écrit :

$$\overrightarrow{M_0M}=\left(\frac{h^p}{p!}+...+\frac{h^{q-1}}{(q-1)!}k_{q-1}+h^q\eta_1(h)\right)\overrightarrow{V_1}+\left(\frac{h^q}{q!}+h^q\eta_2(h)\right)\overrightarrow{V_2}$$

et les coordonnées de M dans le nouveau repère sont:

$$X=\left(\frac{h^p}{p!}+...+\frac{h^{q-1}}{(q-1)!}k_{q-1}+h^q\eta_1(h)\right)\text{ et }Y=\left(\frac{h^q}{q!}+h^q\eta_2(h)\right).$$

La pente de la tangente à la courbe, au point M_0 est donnée par la limite de $\dfrac{Y}{X}$ lorsque $h\to 0$, c'est-à-dire 0. La tangente est donc portée par$\overline{V_1}$, d'où le résultat:

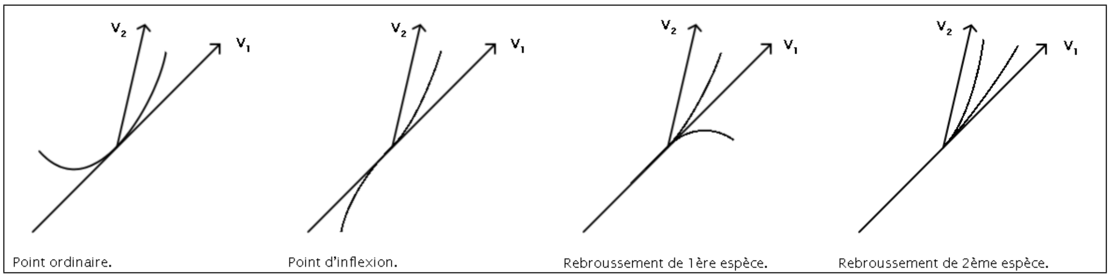
En un point stationnaire, la tangente à la courbe, au point M_0 , est portée par le premier vecteur dérivé non nul $\overrightarrow{F^{(p)}}(t_0)$ et la pente de cette tangente est $\dfrac{y^{(p)}(t_0)}{x^{(p)}(t_0)}$

b) Allure de la courbe:

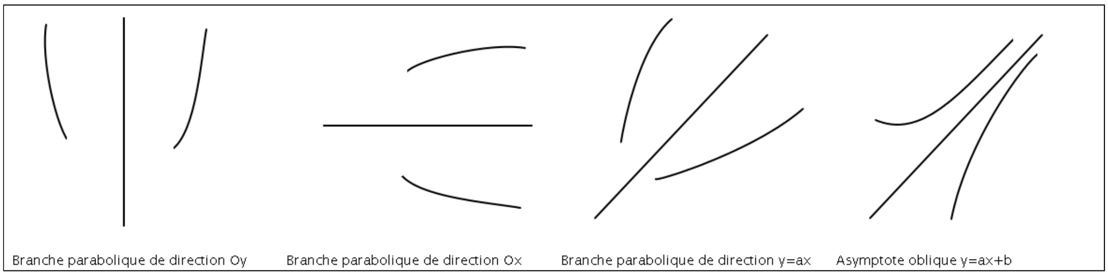
Lorsque h est voisin de 0, le signe de X est celui de h^p, et le signe de Y est celui de h^q , par conséquent:

- Si p est impair et q est pair, M_0 est un point ordinaire.
- Si p est impair et q est impair, M_0 est un point d'inflexion.
- Si p est pair et q est impair, M_0 est un point de rebroussement de 1ère espèce.
- Si p est pair et q est pair, M_0 est un point de rebroussement de 2ème espèce.

Exercice 2.2.2 *a*) On pose $F(t)=(t^3,t^4)$. Vérifier que 0 est un point ordinaire.
b) On pose $F(t)=(t^5,t^3)$. Vérifier que 0 est un point d'inflexion.
c) On pose $F(t)=(t^2,t^3)$. Vérifier que 0 est un point de rebroussement de première espèce.
b) On pose $F(t)=(t^2,t^4+t^4+t^6)$. Vérifier que 0 est un point de rebroussement de deuxième espèce.
Tracer les courbes correspondantes.



3) Branches infinies
Si la distance de O à $M(t)$ tend vers l'infini lorsque t tend vers t_0, la courbe admet une branche infinie. On l'étudie en appliquant la méthode utilisée pour les courbes d'équation $y = f(x)$:
On recherche la limite de $\dfrac{y(t)}{x(t)}$ lorsque t tend vers t_0 avec $x(t)$ et $y(t)$ tendant vers l'infini.
• Si on trouve ∞ ou 0 , la courbe admet une branche parabolique de direction Oy ou Ox.
• Si on trouve a fini non nul, on recherche la limite de $y(t) - ax(t)$ lorsque t tend vers t_0.
  – Si cette limite est ∞ , la courbe admet une branche parabolique de direction $y = ax$.
  – Si cette limite est b , la courbe admet pour asymptote la droite d'équation $y = ax + b$ et le signe de $y(t) - a\,x(t) - b$ donne la position de la courbe par rapport à son asymptote.



2.3 Plan d'étude d'une courbe paramétrée.

1) Recherche du domaine d'étude
Après avoir déterminé séparément les domaines de définition de $x(t)$ et $y(t)$, on utilise

• les périodicités, pour obtenir un domaine de représentation propre (en faisant varier t sur ce domaine, on décrit la courbe une fois et une seule),

• puis les parités, pour obtenir le domaine d'étude (en faisant varier t sur ce domaine, on obtient un arc de courbe, et l'on complète la courbe en effectuant des symétries).

2) Etude des variations des fonctions $x(t)$ et $y(t)$.
On remplit le tableau des variations suivant:

t	
$x'(t)$	
$x\,(t)$	
$y\,(t)$	
$y'(t)$	
tangentes et branches infinies	

3) Etude des points stationnaires
Pour obtenir les vecteurs $\overrightarrow{F^{(p)}}(t_0)$ et $\overrightarrow{F^{(q)}}(t_0)$, suivant les énoncés, on pourra calculer les dérivées successives de $x(t)$ et $y(t)$, ou effectuer les développements limités de $x(t)$ et $y(t)$ au voisinage de t_0.

4) Etude des branches infinies
Pour obtenir les différentes limites, on pourra effectuer un développement limité des fonctions $x(t)$ et $y(t)$.

5) Tracé de la courbe

6) Recherche éventuelle des points d'inflexion et des points doubles

a) Points d'inflexion
L'étude d'un point stationnaire donne automatiquement l'allure de la courbe au voisinage de ce point.
On s'intéresse donc aux points réguliers:
• Lorsque la tangente en un point est verticale, ou horizontale, le tableau des variations permet de déterminer l'allure de la courbe au voisinage de ce point.
• Lorsque la tangente est oblique, un point d'inflexion correspond à un extremum de la pente de la tangente $m = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$. D'où la méthode:

Pour obtenir les points d'inflexion, on pose $m = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$, et on recherche les valeurs de t pour lesquelles $m'(t)$ s'annule en changeant de signe.

b) Points doubles
La courbe admet un point double lorsque deux valeurs distinctes du paramètre, appartenant au même domaine de représentation propre, donnent le même point.

On obtient les points doubles en résolvant le système $\left\{\begin{array}{c} x(t_1) = x(t_2) \\ y(t_1) = y(t_2) \\ t_1 \neq t_2 \end{array}\right.$

Puisque ces équations sont symétriques en t_1 et t_2, la méthode de calcul habituelle consiste à simplifier les équations par $(t_1 - t_2)$ et à faire apparaitre les nouvelles variables $S = t_1 + t_2$ et $P = t_1\,t_2$. Les valeurs t_1 et t_2 sont alors les solutions de l'équation $t^2 - S\,t + P = 0$.

Ce que l'étudiant doit savoir faire:
Etudier une courbe $y = f(x)$ ou une courbe paramétrée, avec tableau de variation et tracé

du graphe le plus complet possible.

Exercice. Étude de la courbe définie par $F(t) = (u(t), v(t))$, où

$$u(t) = \frac{t^2+1}{t^2-1} \quad \text{et} \quad v(t) = \frac{t^2}{t-1} \ .$$

Déterminer le *domaine de définition* de F (on constatera qu'il n'y a pas de symétries permettant de réduire ce domaine).
Donner le *tableau de variation* de F et étudier les limites aux bornes.
Points stationnaires. Montrer que 0 est le seul point stationnaire. Pour l'étudier, on conseille d'effectuer des développements limités de u de v à l'ordre 3 au point 0.
Étude des branches infinies. Trouver les branches infinies. Lorsque t tend vers 1, on trouvera la position de la courbe par rapport à l'asymptote grâce à un développement limité de la fonction $v(t) - u(t)$.
Donner enfin l'allure de la courbe définie par F.

3 Exercices

3.1 Etudier la courbe $y = \dfrac{x-1}{x^2+1}$.

3.2 Etudier la courbe $y = \dfrac{x^4+5x}{x^3+1}$.

3.3 Etudier la courbe $y = \cos x + \dfrac{1}{\sin x}$.

3.4 Etudier la courbe $y = \sin x + \sin 2x$

3.5 Etudier la courbe $y = (x^3 - 6x^2)^{\frac{1}{3}}$.

3.6 Etudier la courbe $y = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1+\sqrt{x^2+1}}$

3.7 Etudier la courbe $y = -x + \sqrt{2(1-x^2)}$.

3.8 Etudier les intersections de la courbe $y = a^x$ avec la droite $y = x$, où a est un réel positif fixé

3.9 Etudier les intersections de la courbe $y = a^{(a^x)}$ avec la droite $y = x$, où a est un réel positif fixé.

3.10 Soit C la courbe paramétrée par: $x(t) = \cos(2t) + 2\sqrt{2}\cos t$, $y(t) = \sin(2t)$.
a) Donner la plus petite période de x, celle de y , puis la plus petite période commune à x et y.
b) Etudier les symétries de C . A quel intervalle de $\mathbb{R}$ peut-on se restreindre pour l'étude de C ?
c) Etudier et tracer la courbe C.
(dérivées, tableau des variations, étude du point stationnaire à l'aide des dérivées, tangentes aux points remarquables).

3.11 Soit C la courbe paramétrée par: $x(t) = \frac{t^2}{t-1}$, $y(t) = \frac{(t-2)^2}{t^2-1}$.
Etudier et tracer la courbe C.
(domaine de définition, dérivées, tableau des variations, étude des branches infinies, étude du point stationnaire à l'aide de développements limités, tangentes aux points remarquables, point d'inflexion).

3.12 Soit C la courbe paramétrée par: $x(t) = \frac{t}{t^2-1}$, $y(t) = \frac{t+2}{(t-1)^2}$.
Etudier et tracer la courbe C.
(domaine de définition, dérivées, tableau des variations, étude des branches infinies, tangente au point (0,0) et position de la courbe par rapport à cette tangente, point double).

3.13 On considère les fonctions $x(t) = \ln(\cos t) + \frac{t^2}{2}$, $y(t) = t\ \ln(1+t)$.
On note C l'arc de courbe paramétré obtenu lorsque t varie entre –1 et 1.
Montrer que C admet un unique point stationnaire et donner l'allure de l'arc au voisinage de ce point.