Chapitre 1

Nombres complexes[1]

1 Les nombres réels ne suffisent pas !

1.1 L'équation du second degré à coefficients réels

Dans de nombreux problèmes on est amené à résoudre une équation du type :

$$(E) \qquad ax^2 + bx + c = 0$$

avec a, b, c des réels et $a \neq 0$. Comme vous le savez, une telle équation est dite du « second degré à une inconnue » et, pour mener sa résolution (sans les formules...), on commence par la réduire à sa forme dite « canonique » , (1.1.0.1). Pour se faire, on complète le carré :

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c =& a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\ =& a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x\right) + c \end{aligned}$$

et on reconnaît le début du développement de

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

d'où

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c =& a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} \\ =& a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]. \end{aligned} \tag{1.1.0.1}$$

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$ et on distingue alors trois cas :
Premier cas, si $\Delta > 0$ Dans ce cas, $\frac{\Delta}{4a^2} = \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2$ et (1.1.0.1) implique alors

$$a\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0. \tag{1.1.0.2}$$

[1] Ce chapitre a été réalisé à partir du cours de première année de messieurs P. jaming et J.L. Rouet de l'université d'Orléans.

Il y a alors 2 solutions distinctes

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

et (1.1.0.1) s'écrit :

$$ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2).$$

Ceci permet également de connaître le signe de ax^2+bx+c. Si on appelle r_1 la plus petite des deux racines x_1, x_2 et r_2 la plus grande, on a $r_2 > r_1$, et le signe de ax^2+bx+c est donné par :

x		r_1		r_2	
ax^2+bx+c	$\operatorname{sgn} a$	0	$-\operatorname{sgn} a$	0	$\operatorname{sgn} a$

Deuxième cas, si $\Delta = 0$, (1.1.0.1) s'écrit alors $a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 = 0$. Il y a alors une seule solution (double) $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ et on a la factorisation

$$ax^2+bx+c = a(x-x_0)^2 = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2.$$

Troisième cas, si $\Delta < 0$, il n'y a pas de racine (réelle) puisque

$$ax^2+bx+c = a\underbrace{\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2}\right]}_{\text{positif car}\Delta<0}.$$

1.1.1 Exemples. *Résoudre et factoriser* $2x^2 - 8x + 6 = 0$.

Le discriminant de cette équation est $\Delta = (-8)^2 - 4\times 2\times 6 = 16 = 4^2 > 0$. Les solutions sont donc $x_1 = \frac{-(-8)-4}{2\times 2} = 1$ et $x_2 = \frac{-(-8)+4}{2\times 2} = 3$ d'où

$$2x^2 - 8x + 6 = 2(x-1)(x-3).$$

Résoudre et factoriser $3x^2 - 12x + 12 = 0$.
Le discriminant de cette équation est $\Delta = (-12)^2 - 4\times 3\times 12 = 0$. Il y a donc une seule solution $x_0 = -\frac{-12}{2\times 3} = 2$ et

$$3x^2 - 12x + 12 = 3(x-2)^2.$$

Résoudre et factoriser $2x^2 + 8x + 9 = 0$.
Le discriminant de cette équation est $\Delta = 8^2 - 4\times 2\times 9 = -8 < 0$. Il n'y a donc pas de solution réelle. Toutefois

$$\begin{aligned} 2x^2+8x+9 &= 2(x^2+4x)+9 \\ &= 2\big((x+2)^2 - 2^2\big) + 9 = 2(x+2)^2 - 8 + 9 \\ &= 2(x+2)^2 + 1 \end{aligned}$$

1.1.2 Exercices. Résoudre et factoriser :

$$6x^2 - x - 1 = 0, \qquad 3x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 = 0, \qquad \frac{1}{2}x^2 + 2x + 5 = 0.$$

1.2 Un peu d'histoire

Nous venons de voir que toutes les équations de degré 2 n'admettent pas nécessairement de racine réelle. En particulier, l'équation simple $x^2 = -1$ soit :

$$x^2 + 1 = 0 \tag{1.2.0.1}$$

n'admet pas de solution dans les nombres réels. Cela dit, les mathématiciens ont introduit un nombre dit « imaginaire » noté i tel que $i^2 = -1$ ainsi solution de l'équation ci-dessus et construit les « nombres complexes » .

L'introduction de ces nouveaux nombres remonte au XVI^{eme}. Les algébristes italiens de l'université de Bologne (Del Ferro, Tartaglia, Cardan, ...), ont découvert les formules permettant de résoudre les équations polynomiales du troisième degré, comme par exemple

$$x^3 - 7x + 6 = 0 \tag{1.2.0.2}$$

Ils ont constaté un fait qui leur a paru incompréhensible. Chaque fois qu'une équation de ce type possède trois solutions réelles, comme 1, 2 et -3 pour l'équation précédentes, leurs formules permettant le calcul de ces solutions font intervenir des racines carrées de nombres négatifs (voir 5.1.0.1 page 23). Ils ont alors considéré ces racines carrées comme « nouveaux nombres » qu'ils ont appelés *nombres impossibles.* Néanmoins l'introduction de ces nouveaux nombres ne s'est pas faite sans mal.

1.2.1 Pour aller plus loin [2]. En 1637, Descartes dans sa Géométrie, propose d'accepter comme solution d'une équation non seulement les nombres négatifs, mais aussi ceux qui pourraient comporter une racine carrée d'un nombre négatif. Il justifie ceci par un théorème qui ne sera vraiment démontré qu'au XIX^{eme} siècle et qui deviendra le théorème fondamental de l'algèbre :

> *Une équation de degré n a n solutions, si on accepte les négatives, celles qui comportent une racine carré d'un nombre négatif et les multiplicités.*

La construction rigoureuse des nombres complexes n'a été achevée qu'à la fin du XVIII^{eme} siècle. La notation définitive est due à Euler. Dans « Eléments d'algèbre » il écrit en 1774 en s'inspirant des régles de calcul pour les racines carrées des nombres positifs :

« *Maintenant comme $-a$ signifie autant que $+a$ multiplié par -1, et que la racine carrée d'un produit se trouve en multipliant ensemble les racines des facteurs, il s'ensuit que la racine de a multiplié par -1, ou $\sqrt{-a}$, est autant que $\sqrt{a}$ multiplié par $\sqrt{-1}$.*
Or $\sqrt{a}$ est un nombre possible ou réel, par conséquent ce qu'il y a d'impossible dans une quantité imaginaire, peut toujours se réduire à $\sqrt{-1}$. Par cette raison donc, $\sqrt{-4}$ est autant que $\sqrt{4}$ multiplié par $\sqrt{-1}$ et autant que $2.\sqrt{-1}$, à cause de $\sqrt{4}$ égale à 2. Par la même raison $\sqrt{-9}$ se réduit à $\sqrt{9}.\sqrt{-1}$, ou $3\sqrt{-1}$ et $\sqrt{-16}$ signifie $4\sqrt{-1}$.
De plus comme $\sqrt{a}$ multipliée par $\sqrt{b}$ fait $\sqrt{ab}$, on aura $\sqrt{6}$ pour la valeur de $\sqrt{-2}$ multipliée par $\sqrt{-3}$. »

[2] d'après « Images, imaginaires, imaginations, une perspective historique pour l'introduction des nombres complexes » IREM, éd. Ellipse. p. 157

Exercice

1. Comment écrit-on aujourd'hui des expressions comme « signifie autant que » ou « est autant que » utilisées par Euler ?
2. Quelles sont les différentes règles du calcul algébrique évoquées par Euler ?
   Indiquer les égalités correspondant aux différentes phrases du texte.
3. D'après la définition, à quoi est égale $(\sqrt{-1})^2$?
   En appliquant les règles du calcul algébrique calculez : $\sqrt{-1}\,.\,\sqrt{-1}$.
   Ces deux égalités sont-elles compatibles ?
4. Euler écrit aussi : $\sqrt{-2}.\sqrt{-3} = \sqrt{6}$! Or, suivant la démarche d'Euler, on va écrire

$$\sqrt{-2}.\sqrt{-3} = \sqrt{2}.\sqrt{-1}.\sqrt{3}.\sqrt{-1} = \sqrt{2}.\sqrt{3}.(\sqrt{-1})^2 = ... = ...$$

   Ces deux égalités sont-elles compatibles ?

Il est donc difficile d'utiliser la notation $\sqrt{-a}$ pour un réel $a > 0$, et de continuer à utiliser les règles de calcul connues pour les nombres positifs. Euler va lui-même s'apercevoir de ces contradictions. Aussi décidera-t-il de noter par i (début d'imaginaire ou impossible) la quantité qu'il notait $\sqrt{-1}$.

On peut tout de suite noter la règle suivante :

La notation « racine carrée » : $\sqrt{\ }$, ne s'utilise qu'avec des nombres réels positifs

2 Forme cartésienne et opérations

2.1 Définitions

Nous avons vu qu'il a été nécessaire d'introduire des nombres ayant un carré négatif. Pour ce faire, les mathématiciens ont introduit le nombre *imaginaire* i vérifiant $i^2 = -1$. On considère alors $\mathbb{C}$, l'ensemble des « expressions » de la forme $z = x + yi$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On dit que z est un *nombre complexe*.

Définition 2.1.1 *L'ensemble des nombres complexes, désigné par la lettre $\mathbb{C}$, est l'ensemble des expressions de la forme (dite cartésienne)*

$$z = x + yi, \quad \text{où} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad i^2 = -1$$

- *Le nombre réel x est appelé la* **partie réelle** *de z. On note $x = \operatorname{Re} z$*
- *Le nombre réel y est appelé la* **partie imaginaire** *de z. On note $y = \operatorname{Im} z$*
- *Le nombre complexe $x - yi$ est appelé le* **complexe conjugué** *de z. On note $\bar{z} = x - yi$*
- *Le nombre réel positif $\sqrt{x^2 + y^2}$ est appelé le* **module** *de z. On note $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$*

2.1.2 Le plan complexe.

- A la donnée d'un nombre complexe $z = x + yi$ correspond le couple de nombres réels $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on peut associer à un nombre complexe un point et un vecteur du plan $\mathbb{R}^2$. Plus précisément, dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ orthonormal, on associe au nombre complexe $z = x + yi$ le point M de coordonnées $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ aussi de coordonnées (x, y).

  On dit alors que $z = x + yi$ est l'affixe du point M et du vecteur $\vec{u}$.

- Deux nombres complexes sont égaux si ils sont les affixes d'un même point du plan c'est-à-dire si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire, soit
$$x + yi = x' + y'i \quad \text{si et seulement si} \quad x = x' \text{ et } y = y'$$

- Si M est le point du plan complexe d'affixe $z = x+yi$ alors le point d'affixe $\bar{z} = x-yi$ est le symétrique du point M par rapport à l'axe des abscisses.

- Pour z un complexe, son module $|z|$, est la distance de M à l'origine : OM ou si l'on préfère la longueur (ou norme) du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$. Ainsi, le cercle de centre l'origine et de rayon r est l'ensemble des points du plan d'affixes les nombres complexes z tels que $|z| = r$.

2.1.3 Notations

- On écrit 0 pour $0i$, i pour $1i$ et $-i$ pour $-1i$. Ainsi on a $2+0i = 2$, $-3+1i = -3+i$, $\sqrt{2} - 1i = \sqrt{2} - i$ ...

- Un nombre complexe $z = x + yi$ est dit « réel » si $y = \operatorname{Im} z = 0$, on note alors simplement $z = x$.

- De même z est dit « imaginaire pur » si $x = \operatorname{Re} z = 0$ on note alors $z = yi$.

- En particulier on note par 0 le nombre complexe dit nul : $0 + 0i$, seul nombre complexe à la fois réel et imaginaire pur.

2.2 Addition et multiplication

L'addition ou la multiplication de deux nombres complexes est définie exactement de la même façon que celle que vous connaissez sur les fonctions polynômes, le nombre i jouant le rôle de la variable. Il faut seulement respecter le fait que $i^2 = -1$.

Par exemple si $f(x) = 3+2x$ et $g(x) = 5-4x$, on obtient pour la somme $s(x) = f(x)+g(x)$ et le produit $p(x) = f(x)g(x)$:

$$\begin{aligned} s(x) =& (3 + 2x) + (5 - 4x) = 3 + 5 + 2x - 4x = 8 - 2x \\ p(x) =& (3 + 2x)(5 - 4x) = 15 - 12x + 10x - 8x^2 = 15 - 2x - 8x^2 \end{aligned}$$

Ainsi, pour les deux nombres complexes $3 + 2i$ et $5 - 4i$ on a :

$$\begin{aligned} &(3 + 2i) + (5 - 4i) = 3 + 5 + 2i - 4i = 8 - 2i \\ &(3 + 2i)(5 - 4i) = 15 - 12i + 10i - 8i^2 = 15 - 2i - 8(-1) = 23 - 2i \end{aligned}$$

De façon plus générale, pour $z = x + yi$ et $z' = x' + y'i$, la somme $z + z'$ et le produit zz'

s'effectuent de la même manière, ce qui donne :

$$
\begin{aligned}
z + z' =& (x + yi) + (x' + y'i) = x + yi + x' + y'i \\
=& (x + x') + (y + y')i \\
\\
zz' =& (x + yi)(x' + y'i) = xx' + xy'i + yx'i + yy'i^2 \\
=& xx' + xy'i + yx'i - yy' \\
=& xx' - yy' + (yx' + x'y)i,
\end{aligned}
\tag{2.2.0.1}
$$

L'addition et la multiplication sur les nombres complexes sont donc définies par les égalités :

$$
\boxed{\begin{array}{l}(x + yi) + (x' + y'i) = (x + x') + (y + y')i \\ (x + yi)(x' + y'i) = (xx' - yy') + (yx' + x'y)i\end{array}}
$$

Remarque : De nombreux cours définissent les complexes avec la notation $a + ib$. Dans notre cas, le produit du nombre complexe $i = 0 + 1i$ par un complexe réel $x = x + 0i$ donne avec la définition précédente $ix = (0 + 1i)(x + 0i) = xi$; ainsi on a $2 + i3 = 2 + 3i$ et plus généralement $a + ib = a + bi$.

2.2.1 Interprétation géométrique

Pour deux nombres complexes $z = x + yi$ et $z' = x' + y'i$ et v, v' les vecteurs du plan complexe d'affixe z, z', le nombre $z + z'$ est l'affixe du vecteur $v + v'$ (la somme s'obtient par la loi du parallélogramme).

Exercice : Montrer que la mutiplication d'un nombre complexe par i correspond à la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Exercice : Soit λ un nombre réel. Qu'elle est l'interprétation géométrique de la multiplication d'un nombre complexe par le réel λ ?

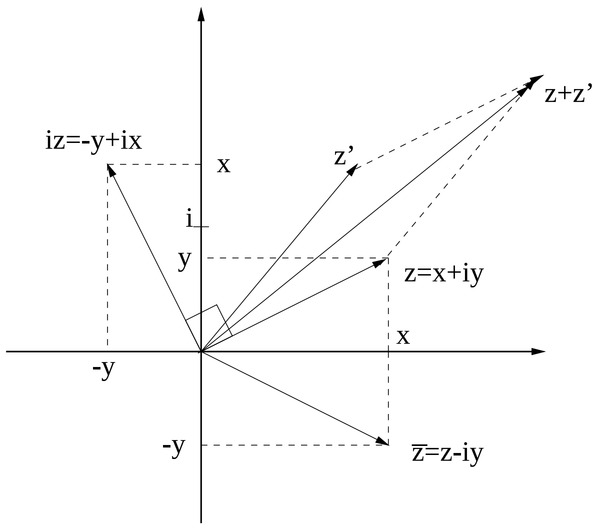

Fig. 1.1 – Le plan complexe : coordonnées cartésiennes

2.2.2 Premières propriétés des opérations

Toutes les propriétés de l'addition et de la mutiplication dans $\mathbb{R}$ restent vraies dans $\mathbb{C}$. Ainsi, il est facile de vérifier que (à faire au moins une fois):

- $z + 0 = 0 + z = z$, $1z = z1 = z$ et $0z = z0 = 0$.
- $z + z' = z' + z$ et $zz' = z'z$.
- $z + (z' + z'') = (z + z') + z''$ et $z(z'z'') = (zz')z''$.
- $z(z' + z'') = zz' + zz''$.
- $zz' = 0$ alors $z = 0$ ou $z' = 0$

Exercice : Démontrer la propriété : si $zz' = 0$ alors $z = 0$ ou $z' = 0$. Enoncer la propriété « *contraposée* » .

Exemple de calcul :

$$\begin{aligned}
(1-i)((3+2i)+i(5-\sqrt{2}i)) &= (1-i)(3+2i+5i+\sqrt{2}) \\
&= (1-i)(3+\sqrt{2}+7i) \\
&= 3+\sqrt{2}+7i-(3+\sqrt{2})i+7 \\
&= 10+\sqrt{2}+(4-\sqrt{2})i \\
(z-i)(z+i) &= z^2+iz-iz+i^2 \\
&= z^2+1 \\
(z+2-3i)(z+i-1) &= z^2+(i-1+2-3i)z+(2-3i)(i-1) \\
&= z^2+(1-2i)z+5i+1
\end{aligned}$$

2.2.3 Formule du binôme de Newton

Les coefficients du binôme : C_n^k ou $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$.

Les C_n^k sont définis par $C_n^0 = C_n^n = 1$, $C_n^k = 0$ si $k < 0$ et si $k > n$, et par la relation

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k. \tag{2.2.3.1}$$

On les calcule à l'aide du triangle de Pascal (c'est à dire les formules ci-dessus) : on met des 1 sur le bord du triangle, et chaque élément est la somme des deux éléments au-dessus de lui. Ainsi

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}$$

le coefficient C_n^k est alors le k-ième élément de la n-ième ligne (les lignes sont comptées à partir de 0, de même que les éléments de chaque ligne, par exemple $C_6^2 = 15$).

Pour n et k des entiers tels que $0 \leq k \leq n$, les coefficients du binôme peuvent aussi être définis par la formule suivante

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{2.2.3.2}$$

où l'on a posé $0! = 1$ et $k! = 1 \times 2 \times \ldots \times (k-1) \times k$. Cette formule ne permet pas vraiment de les calculer car $n!$ dépasse très vite les capacités de calcul des ordinateurs, ce qui n'est pas le cas de la méthode du triangle de Pascal.

Exercice : Montrer qu'à partir de la définition (2.2.3.2) pour les C_n^k, on a bien (2.2.3.1).

Théorème 2.2.4 *(la Formule du binôme de Newton) Soient $z, z' \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$,*

$$(z + z')^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k z^k (z')^{n-k}.$$

Le démonstration de ce résultat est obtenue avec une récurrence (à un cran) sur n.

Principe du raisonnement par récurrence (à un cran...): Supposons que l'on veuille prouver une propriété P_n dépendant d'un entier n, pour tout $n \geq n_0$. Il suffit de prouver les deux points suivants :

- P_{n_0} est vraie (en général $n_0 = 0$ mais on rencontre aussi $n_0 = 1$ voire n_0 plus grand).

- Pour un n quelconque, l'hypothèse « P_n est vraie » entraîne la conclusion « P_{n+1} est vraie » (à un cran... Mais parfois, on utilise l'hypothèse P_k est vraie pour tout $k \leq n$ entraîne la conclusion P_{n+1} est vraie).

Démonstration du théorème: Dans le cas qui nous intéresse, la propriété P_n est

$$(z + z')^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k z^k (z')^{n-k}.$$

Le fait que P_1 est vraie est trivial: $z + z' = z + z'$. Supposons que P_n est vraie: on écrit

$$
\begin{aligned}
(z+z')^{n+1} &= (z+z')(z+z')^n \\
&= (z+z')(\sum_{k=0}^{n} C_n^k z^k (z')^{n-k}) \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_n^k z^{k+1}(z')^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k z^k (z')^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_n^k z^{k+1}(z')^{(n+1)-(k+1)} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k z^k (z')^{(n+1)-k} \\
&= \sum_{k'=1}^{n+1} C_n^{k'-1} z^{k'}(z')^{(n+1)-k'} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k z^k (z')^{(n+1)-k} \\
&= \sum_{l=1}^{n} z^l (z')^{(n+1)-l}(C_n^{l-1} + C_n^l) + z^{n+1} + (z')^{n+1} \\
&= \sum_{l=0}^{n+1} C_{n+1}^l z^l (z')^{(n+1)-l}.
\end{aligned}
$$

ce qui montre que « P_{n+1} est vraie » et ce qui termine cette preuve. □

2.2.5 Opposé, différence de nombres complexes

• Pour tout $z = x + yi \in \mathbb{C}$, le nombre complexe $-1z = -x - yi$ est l'unique nombre complexe z' tel que $z + z' = 0$; ce nombre complexe est *l'opposé* de z et on le note simplement par $-z$. La différence $z - z'$ de deux nombres complexes, est alors définie par $z - z' := z + (-z')$.

• Si M et M' sont respectivement les points du plan complexe d'affixe z et z', la différence $z-z'$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{M'M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM'}$. Pour le module on a donc $|z-z'| = MM'$. Ainsi, le cercle de centre A d'affixe a et de rayon r est l'ensemble des points du plan ayant pour affixes les nombres complexes z tels que $|z - a| = r$.

Exercice : A et B sont les points du plan complexe d'affixes respectives $1-5i$ et $-3+3i$.
- Déterminer l'équation cartésienne de la médiatrice Δ du segment $[AB]$.
- Déterminer l'équation cartésienne du cercle de centre C d'affixe 3 tangent à Δ.

2.2.6 Inverse d'un nombre complexe non nul, quotient

Les calculs sur les inverses ou les quotients utilisent le résultat simple ci-dessous (à démontrer), qui est par ailleurs souvent utile :

$$\boxed{\text{Pour tout } z \in \mathbb{C},\ z\overline{z} = |z|^2} \qquad (2.2.6.1)$$

Proposition 2.2.7 *Pour tout nombre complexe $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, il existe un unique $z' \in \mathbb{C}$ tel que $zz' = 1$.*

Définition 2.2.8 *On note $z' = \dfrac{1}{z}$ et on dit alors que z' est l'inverse de z. Plus généralement, si $z, z' \in \mathbb{C}$ et si $z' \neq 0$, le quotient de z par z' noté $\dfrac{z}{z'}$ est défini par $\dfrac{z}{z'} := z \times \dfrac{1}{z'}$.*

Démonstration de (2.2.7). Commençons par montrer l'unicité c'est-à-dire que pour tout $z \in \mathbb{C}$ non nul donné, si il existe un nombre $z' \in \mathbb{C}$ tel que $zz' = 1$ alors il n'y en aura pas d'autre. **La méthode est très générale et s'applique dans de nombreux cas**. Son principe est facile : pour montrer qu'un objet est unique on suppose qu'il en existe deux de la sorte et... on montre que ces deux sont les mêmes... Pour le cas présent, considérons donc qu'il existe deux nombres complexes z' et z" tels que $zz' = 1$ et $zz" = 1$. On aurait alors : $zz' = zz"$ donc $zz' - zz" = 0$ soit $z(z' - z") = 0$, or puisque $z \neq 0$ ce produit est nul seulement pour $z' - z" = 0$ c'est-à-dire pour $z' = z"$ et l'unicité est donc établie.
Il reste à montrer l'existence. Comme $z\overline{z} = |z|^2$, (2.2.6.1), on a $z\frac{\overline{z}}{|z|^2} = 1$ et ainsi : $z' = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}}$. En posant $z' = \frac{1}{z}$, on a en résumé :

$$\boxed{\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}}} \tag{2.2.8.1}$$

Ce qui termine cette démonstration. □

L'égalité précédente est en pratique très utile. Elle permet entre autre de calculer la forme cartésienne d'un inverse ou d'un quotient. Par exemple pour un quotient, si $z = x + iy$, $z' = x' + iy' \neq 0$ alors

$$\begin{aligned}\frac{z}{z'} &= \frac{z\overline{z}'}{z'\overline{z}'} = \frac{(x+iy)(x'-iy')}{(x'+iy')(x'-iy')}\\ &= \frac{xx'+yy'+i(x'y-xy')}{(x')^2+(y')^2}\\ &= \frac{xx'+yy'}{(x')^2+(y')^2} + i\frac{x'y-xy'}{(x')^2+(y')^2}.\end{aligned}$$

Évidemment, seule la méthode est à connaître !

Exercices : Calculer $\dfrac{z}{z'}$ avec

1. $z = 1 - i,\ z' = \sqrt{2} + \sqrt{2}i;\quad z = 1 - i,\ z' = 1 + i\sqrt{3};$
2. $z = -\sqrt{3} - i,\ z' = i;\quad z = 3 + 2i,\ z' = 3 - 2i.$

Une solution :

$$\frac{1-i}{\sqrt{2}+\sqrt{2}i} = \frac{(1-i)(\sqrt{2}-\sqrt{2}i)}{(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)(\sqrt{2}-\sqrt{2}i)} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}+i(-\sqrt{2}-\sqrt{2})}{\sqrt{2}^2+\sqrt{2}^2} = -i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2.2.9 Conjugaison, module et opérations

Pour terminer cette section donnons quelques relations et propriétés élémentaires. Concernant la conjugaison on a :

1. $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}',\qquad \overline{z.z'} = \bar{z}.\bar{z}'\quad$ et $\quad\overline{(\frac{z}{z'})} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}.$
2. $\operatorname{Re} z = \dfrac{z + \bar{z}}{2}\quad$ et $\quad\operatorname{Im} z = \dfrac{z - \bar{z}}{2i}.$

3. $z = \bar{z}$ si et seulement si z est réel.

4. $z = -\bar{z}$ si et seulement si z est imaginaire pur.

Les preuves sont laissées au lecteur. On retiendra que la conjugaison est compatible aux opérations (propriétés 1.), et permet avec les trois dernières relations de déterminer si un nombre complexe est réel ou imaginaire pur. Concernant le module, on a déjà vu que $|z|^2 = z\bar{z}$ (2.2.6.1), on a aussi :

5. $|\mathrm{Re}\, z| \leq |z|, \quad |\mathrm{Im}\, z| \leq |z| \quad$ et $\quad |z| = |\bar{z}|$.

6. $|z.z'| = |z|.|z'| \quad$ et $\quad |\frac{z}{z'}| = \frac{|z|}{|z'|}$.

7. $|z + z'| \leq |z| + |z'|$, (inégalité triangulaire).

8. $||z| - |z'|| \leq |z - z'|$.

Le module est donc compatible au produit et au quotient (propriété 6), mais l'on a seulement une inégalité pour la somme : *l'inégalité triangulaire*. La propriété 5 s'obtient par des calculs directs. Pour la sixième on peut par exemple utiliser (2.2.6.1) et la propriété 1. La démonstration de l'inégalité triangulaire n'est pas directe. On a avec (2.2.6.1) :

$$|z + z'|^2 = (z + z')\overline{(z + z')} = (z + z')(\bar{z} + \bar{z'}) = |z|^2 + |z'|^2 + z\bar{z}' + \bar{z}z'.$$

Pour $z\bar{z}' + \bar{z}z' = z\bar{z}' + \overline{z\bar{z}'}$ qui est donc un réel on a la majoration :

$$z\bar{z}' + \bar{z}z' = 2\mathrm{Re}\,(z\bar{z}') \leq 2|z\bar{z}'| = 2|z||z'|$$

Ainsi, on obtient avec la première égalité

$$|z + z'|^2 \leq |z|^2 + |z'|^2 + 2|z||z'| = (|z| + |z'|)^2$$

ce qui donne l'inégalité triangulaire puisque deux nombres positifs sont dans le même ordre que leurs carrés (car la fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$). La dernière inégalité (7) se déduit de la précédente, en écrivant $z = (z - z') + z'$. □

Exercices

1. Soit M un point du plan d'affixe $z \neq 0$. Construisez le point M' d'affixe $1/z$.

2. Comment faut-il choisir z pour que $Z = \dfrac{5z - 2}{z - 1}$ soit réel ?

3. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $(z + 1)(\bar{z} - i)$ soit un imaginaire pur?

3 Forme polaire d'un nombre complexe

3.1 Nombres complexes de module un, forme polaire

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe de module 1, alors le point M d'affixe z est un point du cercle trigonométrique et il existe un réel $\theta \in]-\pi, \pi]$ tel que $x = \cos\theta$ et $y = \sin\theta$ soit tel que $z = \cos\theta + i\sin\theta$. Géométriquement, θ représente l'angle entre le vecteur v d'affixe z et le vecteur e_1 d'affixe 1. On dit que θ est *l'angle polaire* du vecteur v. De plus pour θ' un autre réel tel que $z = \cos\theta' + i\sin\theta'$ alors $\theta' = \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ c'est-à-dire que $\theta' \equiv \theta (\text{mod} 2\pi)$.

Définition 3.1.1 *Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On note $\exp(i\theta) = e^{i\theta}$ le nombre complexe $\cos\theta + i\sin\theta$.*

Premières propriétés et formules d'Euler. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ on a :

$$\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}, \qquad |e^{i\theta}| = 1 \quad \text{et} \quad (e^{i\theta})^{-1} = e^{-i\theta}.$$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Démonstration : On a $\overline{e^{i\theta}} = \cos\theta - i\sin\theta = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = e^{i(-\theta)} = e^{-i\theta}$. Ensuite $|e^{i\theta}|^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ ce qui donne le module et en utilisant (2.2.8.1), l'inverse. Pour les formules d'Euler, on a $\cos\theta = \operatorname{Re} e^{i\theta}$ et $\sin\theta = \operatorname{Im} e^{i\theta}$; on obtient les dites formules en utilisant la relation 2 page 15. □

Définition 3.1.2 *Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} = \mathbb{C}^*$. On appelle argument de z tout réel θ tel que $e^{i\theta} = z/|z|$.*

Un nombre complexe non nul a une infinité d'arguments qui diffèrent par un multiple de 2π. Remarquons que si r est le module de z et θ un argument de z, alors $z = |z|\frac{z}{|z|} = re^{i\theta}$, ainsi on obtient la **représentation ou forme polaire** du nombre complexe z:

$$z = re^{i\theta}$$

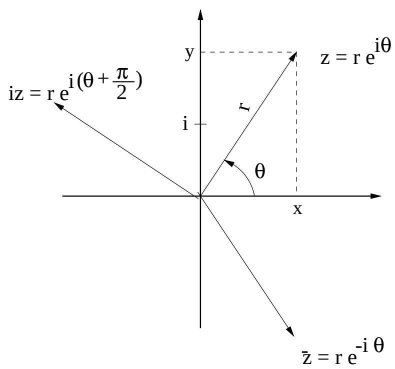

FIG. 1.2 – Le plan complexe : coordonnées polaires

Pour $z = x + yi \neq 0$ et θ un argument de z on a: $z = |z|\frac{z}{|z|} = |z|\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + i\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ ainsi :

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \text{et} \qquad \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Pour finir ce paragraphe, rappelons le tableau des valeurs de cos et sin :

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

et les règles élémentaires suivantes :

$$\begin{array}{ccc}
\sin(-\theta) = -\sin\theta & \sin(\pi+\theta) = -\sin\theta & \sin(\pi-\theta) = \sin\theta \\
\cos(-\theta) = \cos\theta & \cos(\pi+\theta) = -\cos\theta & \cos(\pi-\theta) = -\cos\theta \\
\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\theta & \sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) = \cos\theta. &
\end{array}$$

Il va de soi qu'à défaut de savoir ces formules, il faut savoir les retrouver, en utilisant le cercle trigonométrique (c.f. figure 1.3 et 1.4).

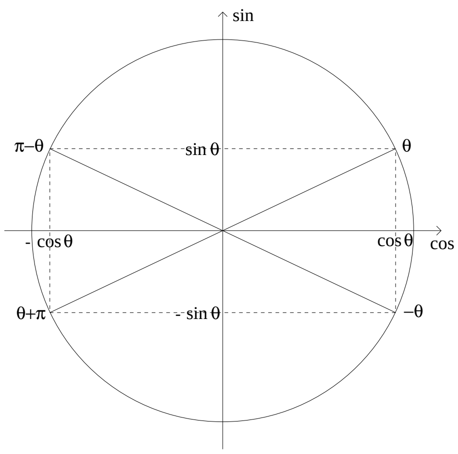

FIG. 1.3 –

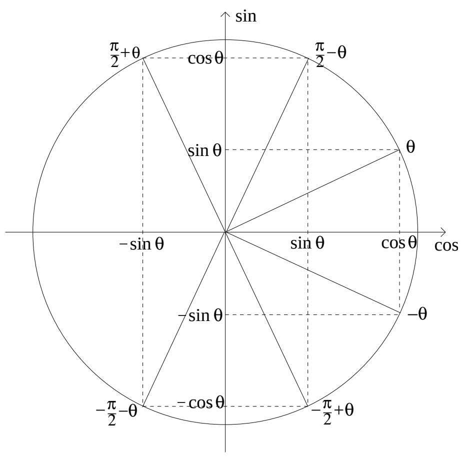

FIG. 1.4 –

3.1.3 Exercice

1. Soient $z = re^{i\theta} \neq 0$ et $z' = r'e^{i\theta'} \neq 0$. Montrer que $z = z'$ si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $r = r'$ et $\theta = \theta' + 2k\pi$.

2. Écrire sous forme polaire : $1 - i,\ -1 + i,\ i,\ 1 + i\sqrt{3},\ -\sqrt{3} - i$.

3. Écrire sous forme cartésienne : $2e^{i\frac{\pi}{6}},\ 3e^{-2i\frac{\pi}{3}},\ e^{-i\frac{\pi}{6}},\ 3e^{i\pi},\ \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

3.2 Argument et produit, interprétation

Proposition 3.2.1 *Pour tout $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, on a*

$$e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} e^{i\theta'}.$$

Démonstration: Il suffit de développer le produit,

$$\begin{aligned} e^{i(\theta+\theta')} &= (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta') \\ &= \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + i(\sin\theta\cos\theta' + \sin\theta'\cos\theta) \\ &= \cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta'), \end{aligned}$$

où l'on a utilisé les formules de trigonométrie pour écrire la dernière ligne. □

Cette proposition montre qu'on peut manipuler les exponentielles complexes comme on a l'habitude de manipuler les exponentielles réelles. Le produit ou le quotient de deux nombres complexes écrits sous forme polaire s'explicitent alors simplement. En effet, pour $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$, on a :

$$zz' = re^{i\theta}.r'e^{i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')} \quad \text{et pour } z' \neq 0, \quad \frac{z}{z'} = \frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'}\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$$

En particulier:

$$\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z') \ (\text{mod} 2\pi) \quad \text{et} \quad \arg(z/z') \equiv \arg(z) - \arg(z') \ (\text{mod} 2\pi).$$

On peut remarquer que la proposition (3.2.1) permet de retrouver rapidement certaines formules classiques de trigonométrie. Par exemple,

$$\begin{aligned} \cos(\theta+\theta') + i\,\sin(\theta+\theta') &= e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'} \\ &= (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta') \\ &= \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + i(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta'). \end{aligned}$$

En comparant les parties réelles et imaginaires des deux membres, on obtient

$$\begin{aligned} \cos(\theta+\theta') &= \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' \\ \sin(\theta+\theta') &= \cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta'. \end{aligned}$$

On peut en déduire $\cos(\theta-\theta')$ et $\sin(\theta-\theta')$, soit en remplaçant θ' par $-\theta'$ soit en recommençant : $\cos(\theta-\theta') + i\sin(\theta-\theta') = e^{i(\theta-\theta')} = e^{i\theta}e^{-i\theta'} = \ldots$

3.2.2 Interprétation géométrique

Produit par un nombre complexe de module 1. Soit $\omega \in \mathbb{C}$, de module $|\omega| = 1$, donc $\omega = e^{i\theta_0}$. Considérons l'application R_{θ_0} de $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ qui à z associe ωz. Si $z = re^{i\theta}$, alors $\omega z = re^{i(\theta+\theta_0)}$, c'est-à-dire que ωz est le nombre complexe de même module que z et d'argument $\theta + \theta_0$. Ainsi, le point d'affixe ωz est obtenu en faisant tourner d'un angle θ_0 le point d'affixe z. L'application R_{θ_0} est donc la rotation d'angle θ_0 et de centre O (justifiant à posteriori la notation).

Produit par un nombre complexe. Considérons maintenant $a \in \mathbb{C}^*$ tel que $a = \rho_0 e^{i\theta_0}$, et l'application qui à z associe az. On a $az = \rho_0 re^{i(\theta+\theta_0)}$, c'est-à-dire que le point d'affixe

az a pour module $\rho_0 r$ et pour argument $\theta + \theta_0$. On l'obtient donc en faisant tourner le point d'affixe z d'un angle θ_0 puis en faisant une homothétie de rapport ρ_0 (ou en faisant l'homothétie puis la rotation, l'ordre n'a ici pas d'importance).

Construction de l'inverse de $z \in \mathbb{C}^*$. Si $z = re^{i\theta}$, alors $z^{-1} = 1/z = (1/r)e^{-i\theta}$, c'est-à-dire le nombre complexe de module $1/r$ et d'argument $-\theta$. On effectue donc une symétrie par rapport à l'axe Ox, suivie d'une homothétie de rapport $1/|z|^2 = 1/r^2$. La transformation géométrique qui au point d'affixe z associe le point d'affixe $\bar{z}^{-1}$ s'appelle l'inversion.

3.3 Applications à la trigonométrie

3.3.1 Formule de De Moivre et applications On établit par récurrence en utilisant la proposition (3.2.1) que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n$, soit :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad \cos n\theta + i \sin n\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^n.$$

C'est ce qu'on appelle la formule de De Moivre. En utilisant la formule du binôme pour développer $(\cos\theta + i\sin\theta)^n$, on obtient $\cos n\theta$ et $\sin n\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

Par exemple pour n = 3 on a :

$$\begin{aligned}\cos 3\theta + i\sin 3\theta =& (\cos\theta + i\sin\theta)^3 \\ =& \cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\sin\theta + 3i^2\cos\theta\sin^2\theta + i^3\sin^3\theta \\ =& \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta + i(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta).\end{aligned}$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires des deux membres, on obtient

$$\begin{aligned}\cos 3\theta =& \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta \\ \sin 3\theta =& 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta.\end{aligned}$$

Si on le souhaite, on peut améliorer ces égalités en utilisant $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, ce qui donne alors

$$\begin{aligned}\cos 3\theta =& 4\cos^3\theta - 3\cos\theta \\ \sin 3\theta =& 3\sin\theta - 4\sin^3\theta.\end{aligned}$$

3.3.2 Linéarisation. L'opération inverse dite de *linéarisation* est également possible en utilisant les formules d'Euler (voir page 16). Par exemple,

$$\begin{aligned}
\cos^3\theta &= \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^3 = \frac{(e^{i\theta}+e^{-i\theta})^3}{2^3}\\
&= \frac{1}{2^3}\left[e^{3i\theta}+3e^{2i\theta}e^{-i\theta}+3e^{i\theta}e^{-2i\theta}+e^{-3i\theta}\right]\\
&= \frac{1}{2^3}\left[e^{3i\theta}+e^{-3i\theta}+3(e^{i\theta}+e^{-i\theta})\right]\\
&= \frac{1}{4}\cos 3\theta+\frac{3}{4}\cos\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin^3\theta &= \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^3 = \frac{(e^{i\theta}-e^{-i\theta})^3}{2^3 i^3}\\
&= \frac{-1}{2^3 i}\left[e^{3i\theta}-e^{-3i\theta}-3(e^{i\theta}-e^{-i\theta})\right]\\
&= \frac{-1}{4}\sin 3\theta+\frac{3}{4}\sin\theta
\end{aligned}$$

3.3.3 Exercices

1. Linéariser $\cos^4\theta$, $\sin^4\theta$ et $\cos^3\theta\sin^2\theta$.
2. Écrire $\cos 4\theta$, $\sin 4\theta$ et $\cos 3\theta\sin 2\theta$ en fonction de puissances de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

4 Racines $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe

4.1 Cas général

Définition 4.1.1 *Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle racine $n^{\text{ième}}$ du nombre complexe z_0 tout nombre complexe ω tel que $\omega^n = z_0$.*

• Par exemple $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ est une racine carrée de i, i est une racine carrée de -1 et donc $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ est une racine quatrième de -1!

• Les racines $n^{\text{ième}}$ de z_0 sont les nombres complexes ω solutions de l'équation en z:

$$z^n - z_0 = 0.$$

• 0 est la seule racine $n^{\text{ième}}$ de 0 car : $z^n = 0 \Leftrightarrow |z^n| = 0 \Leftrightarrow |z|^n = 0 \Leftrightarrow |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

Proposition 4.1.2 *Tout nombre complexe $z_0 \in \mathbb{C}^*$ possède exactement n racines $n^{\text{ième}}$ distinctes. De plus pour $z_0 = \rho_0 e^{i\theta_0}$ la forme polaire de z_0, elles sont de la forme :*

$$\omega_k = \sqrt[n]{\rho_0}\ e^{i(\frac{\theta_0}{n}+\frac{k}{n}2\pi)} \quad k \in \{0, 1, \cdot, n-1\}$$

démonstration. On a donc $\rho_0 = |z_0|$ et θ_0 un argument de z_0. Les nombres ω_k sont bien des racines $n^{\text{ième}}$ de z_0 puisque :

$$\omega_k^n = (\sqrt[n]{\rho_0}\ e^{i(\frac{\theta_0}{n}+\frac{k}{n}2\pi)})^n = \rho_0\ e^{ni(\frac{\theta_0}{n}+\frac{k}{n}2\pi)} = \rho_0\ e^{i(\theta_0+k2\pi)} = \rho_0 e^{i\theta_0} = z_0$$

Cherchons à présent les autres racines ω sous la forme re^{it}. On aura donc $r^n e^{int} = \rho_0 e^{i\theta_0}$. Il y a donc égalité des modules, donc le module d'une racine est $r = \sqrt[n]{\rho_0}$. Il reste donc $e^{int} = e^{i\theta_0}$, c'est-à-dire que les arguments coïncident modulo un facteur de 2π, soit $nt = \theta_0 + 2k\pi$, ou encore

$$t = \frac{\theta_0}{n} + \frac{k}{n} 2\pi.$$

Ainsi pour tout $k \in \mathbb{Z}$, le nombre complexe $\omega_k = \sqrt[n]{\rho_0} e^{i(\frac{\theta_0}{n} + \frac{k}{n} 2\pi)}$ est racine et toutes les racines sont de cette forme.
Montrons qu'il n'y en a en fait que n distinctes: posons $t_k = \frac{\theta_0}{n} + \frac{k}{n} 2\pi$ pour $0 \le k \le n-1$. Chaque re^{it_k} est racine, et ils sont deux à deux distincts: en effet, supposons que $re^{it_k} = re^{it_l}$, $k \ne l$, alors $(t_k - t_l) = 2m\pi$, soit $k - l = mn$ pour un certain $m \in \mathbb{N}^*$. Mais comme $0 \le k, l \le n-1$, on a $|k-l| \le n-1$, donc $|m|n \le n-1$, ce qui force $m = 0$. Supposons maintenant que l'on ait une autre racine ω, d'argument $t_k = \frac{\theta_0}{n} + \frac{k}{n} 2\pi$ pour $k < 0$ ou $k > n-1$. Alors avec la division euclidienne de k par n, il existe $0 \le k' \le n-1$ et $m \in \mathbb{Z}$ tels que $k = nm + k'$, et l'argument t_k s'écrit donc $\frac{\theta_0}{n} + \frac{k'}{n} 2\pi + m2\pi$. Ainsi

$$\omega = \rho_0^{\frac{1}{n}} e^{i(\frac{\theta_0}{n} + \frac{k'}{n} 2\pi + m2\pi)} = \rho_0^{\frac{1}{n}} e^{i(\frac{\theta_0}{n} + \frac{k'}{n} 2\pi)} = \omega_{k'},$$

ce qui achève la preuve. □

4.2 Cas particulier des racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité.

On s'intéresse ici au cas où $z_0 = 1$ et donc aux solutions complexes de l'équation en z

$$z^n - 1 = 0$$

la précédente proposition nous donne :

Proposition 4.2.1 *Le nombre 1 possède exactement n racines $n^{\text{ième}}$ distinctes :*

$$\omega_k = e^{i \frac{k}{n} 2\pi} \quad k \in \{0, 1, \cdot, n-1\}$$

Par exemple, les racines cubiques de 1 sont 1, $e^{2i\pi/3} = j$, $e^{4i\pi/3} = e^{-2i\pi/3} = j^2$. Les racines quatrièmes de 1 sont $1, -1, i, -i$....

Une propriété utile des racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité est la suivante: si ω_k est racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité autre que 1 (soit $k \ne 0 (mod 2\pi)$), alors

$$1 + \omega_k + \omega_k^2 + \cdots + \omega_k^{n-1} = 0.$$

Pour la preuve, il suffit de multiplier par $\omega_k - 1$ l'expression précédente ou bien de remarquer que $z^n - 1 = (z-1)(1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1})$. En particulier pour $k = 1$ soit pour $\omega_1 = e^{i\frac{2\pi}{n}}$, on obtient que la somme des racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité est nulle soit:

$$1 + \omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_{n-1} = 0.$$

4.2.2 Exercice

1. soit z un nombre complexe non nul et d une racine $n^{\text{ième}}$ de z. Montrer qu'il suffit de multiplier d aux racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité pour obtenir les racines $n^{\text{ième}}$ de z.

2. Déterminer les racines cubiques de -8.

3. Factoriser sur $\mathbb{C}$, $z^3 + 8$.

4.3 L'équation du second degré à coefficients complexes

Proposition 4.3.1 *Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$, avec $a \neq 0$. Alors il existe deux solutions complexes (qui peuvent être identiques) à l'équation $az^2 + bz + c = 0$.*

On procède comme dans le cas réel:

$$az^2 + bz + c = a(z + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a} + c = a[(z + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}],$$

donc $az^2 + bz + c = 0$ est équivalent à

$$(z + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$$

On définit le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$, et on distingue deux cas:

- Si $\Delta \neq 0$, $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ admet deux racines carrées distinctes, notées δ et $-\delta$. Alors les solutions sont
$$z^+ = -\frac{b}{2a} + \frac{\delta}{2a} \text{ et } z^- = -\frac{b}{2a} - \frac{\delta}{2a}$$
et elles sont distinctes.
- Si $\Delta = 0$, $-\frac{b}{2a}$ est racine double.

Remarque Dans le cas particulier des coefficients réels, $\Delta \in \mathbb{R}$. Si $\Delta > 0$, il y a deux racines réelles distinctes, si $\Delta < 0$ il y a deux racines complexes conjuguées.

solution sous forme cartésienne On peut vouloir exprimer les solutions sous forme cartésienne, ce qui sera obtenu si l'on sait déterminer la forme cartésienne des racines carrées d'un nombre complexe $z_0 = x_0 + iy_0$. Une méthode est la suivante. On cherche les solutions sous la forme $z = x + iy$.
Comme $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$, si $z^2 = z_0$ alors $\begin{cases} x^2 - y^2 = x_0 \\ 2xy = y_0 \end{cases}$ Remarquons par ailleurs que si $z^2 = z_0$ alors $|z|^2 = |z_0|$ c'est à dire que $x^2 + y^2 = |z_0|$. On est donc amené à résoudre le système

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = x_0 \\ x^2 + y^2 = |z_0| \\ 2xy = y_0 \end{cases}$$

d'où $x^2 = \frac{x_0+|z_0|}{2} = \frac{|z_0|+\operatorname{Re} z_0}{2}$ et $y^2 = \frac{|z_0|-x_0}{2} = \frac{|z_0|-\operatorname{Re} z_0}{2}$. Comme on a toujours $|\operatorname{Re} z_0| \leq |z_0|$, $\frac{|z_0|+\operatorname{Re} z_0}{2} \geq 0$ et $\frac{|z_0|-\operatorname{Re} z_0}{2} \geq 0$, on peut donc calculer leur racine carrée dans $\mathbb{R}$. On trouve donc

$$\begin{cases} x = \pm\sqrt{\frac{|z_0|+\operatorname{Re} z_0}{2}} \\ y = \pm\sqrt{\frac{|z_0|-\operatorname{Re} z_0}{2}} \end{cases}.$$

La condition $2xy = y_0 = \operatorname{Im} z_0$ permet de déterminer les signes $\pm$. Ainsi, si $\operatorname{Im} z_0 \geq 0$ alors $xy \geq 0$ donc x et y sont de même signe. Les solutions sont donc

$$z = x + iy = \sqrt{\frac{|z_0| + \operatorname{Re} z_0}{2}} + i\sqrt{\frac{|z_0| - \operatorname{Re} z_0}{2}} \quad \text{et} \quad z = -\sqrt{\frac{|z_0| + \operatorname{Re} z_0}{2}} - i\sqrt{\frac{|z_0| - \operatorname{Re} z_0}{2}}.$$

Par contre, si $\operatorname{Im} z_0 \leq 0$ alors $xy \leq 0$ donc x et y sont de signe opposé. Les solutions sont donc

$$z = x + iy = \sqrt{\frac{|z_0| + \operatorname{Re} z_0}{2}} - i\sqrt{\frac{|z_0| - \operatorname{Re} z_0}{2}} \quad \text{et} \quad z = -\sqrt{\frac{|z_0| + \operatorname{Re} z_0}{2}} + i\sqrt{\frac{|z_0| - \operatorname{Re} z_0}{2}}.$$

Ces formules ne sont évidemment pas à savoir, par contre la méthode est à connaître.

Exemple de calcul des racines carrées de $1 - i$

• Par les coordonnées polaires $1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$, donc si $z = re^{i\theta}$ est solution de $z^2 = 1 - i$ alors $z^2 = r^2e^{2i\theta} = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ donc

$$\begin{cases} r^2 & = & \sqrt{2} \\ 2\theta & = & -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} r & = & \sqrt[4]{2} \\ \theta & = & -\frac{\pi}{8} + k\pi \end{cases},$$

où $k \in \mathbb{Z}$. On a donc deux solutions $\underline{z_1 = \sqrt[4]{2}e^{-i\frac{\pi}{8}}}$ et $\underline{z_2 = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{7\pi}{8}}}$.

• Par les coordonnées cartésiennes. Si $z = x + iy$ est solution de $z^2 = z_0$ alors $z^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy = 1 - i$ donc $x^2 - y^2 = 1$ et $xy = -\frac{1}{2}$. Par ailleurs, $|z|^2 = |1 - i|$ donne $x^2 + y^2 = \sqrt{2}$ et avec $x^2 - y^2 = 1$, on trouve $x^2 = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ soit $x = \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$ et $y^2 = \frac{-1+\sqrt{2}}{2}$ soit $y = \pm\sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}}$. Enfin, comme $2xy = -1$, x et y sont de signe opposé. Ainsi, les solutions sont

$$z_1 = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} - \frac{i}{\sqrt{2(1+\sqrt{2})}} \quad \text{et} \quad z_2 = -\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} + \frac{i}{\sqrt{2(1+\sqrt{2})}}.$$

En comparant les deux solutions, on en déduit que $\sqrt[4]{2}\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$ et $\sqrt[4]{2}\sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1}{2(1+\sqrt{2})}}$, soit

$$\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}} \quad \text{et} \quad \sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1}{2\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}}.$$

Exercice. Résoudre $z^2 + \sqrt{2}z + \frac{1+i}{4} = 0$.

5 Exercices

5.1 Une formule historique Les algébristes de l'université de Bologne (Del Ferro, Tartaglia, Cardan, ...), ont découvert au XVI^e siècle les formules permettant de résoudre les équations polynomiales du troisième degré. Par exemple pour l'équation $x^3 - 7x + 6 = 0$ (1.2.0.2 page 7), dont les solutions sont les trois nombres réels 1, 2 et -3, leur formule de l'époque s'écrivait :

$$x = \sqrt[3]{\frac{-27 + 10\sqrt{-3}}{9}} + \sqrt[3]{\frac{-27 - 10\sqrt{-3}}{9}}. \tag{5.1.0.1}$$

Le but de cet exercice est de montrer que la formule (5.1.0.1) avec les notations utilisées est trop imprécise (bien que pouvant être considérée comme exacte modulo les sous-entendus qu'elle implique).

1. Calculer le carré de $i\sqrt{3}$ et $-i\sqrt{3}$. La notation $\sqrt{-3}$ est-elle clairement définie ? On choisit pour la suite de remplacer $\sqrt{-3}$ par $i\sqrt{3}$ dans la formule (5.1.0.1) (mais on aurait pu tout aussi bien prendre $-i\sqrt{3}$). On considère à présent l'équation

$$z^3 - \frac{-27+10i\sqrt{3}}{9} = 0 \tag{5.1.0.2}$$

2. Vérifiez que les nombres $z_0 = 1 + \frac{2}{3}i\sqrt{3}$, $z_1 = -\frac{3}{2} + \frac{1}{6}i\sqrt{3}$ et $z_2 = \frac{1}{2} - \frac{5}{6}i\sqrt{3}$ sont solutions de l'équation précédente. Comment peut-on appeler ces nombres ? La notation $\sqrt[3]{\frac{-27+10i\sqrt{3}}{9}}$ est-elle clairement définie ?

3. Si z est solution de (5.1.0.2), le conjugué $\bar{z}$ est solution de quelle équation ? En déduire des valeurs possibles pour $\sqrt[3]{\frac{-27-10i\sqrt{3}}{9}}$.

4. Comment doit-on à présent interpréter la formule (5.1.0.1) ?

5.2 Dessiner les ensembles déterminés dans le plan complexe par les conditions suivantes :

- $|z| < 1$;
- $z + \bar{z} = 1$;
- $z - \bar{z} = i$;
- $|z-1| = |z+1|$;
- $|z-1,5| = |z+i|$;
- $z + \bar{z} = z^2$.

5.3 Mettre sous forme cartésienne les nombres complexes suivants :

- $(5-3i)(1+i)$, $(2-3i)(2+i)-(4-2i)$, $1+2i+(2i)^2+(2i)^3$, $\frac{1}{2i}$, $\frac{1}{1+i}+\frac{1}{1-i}$;
- $\frac{3+4i}{2-3i}$, $(1+i)^{100}$, $\frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$, $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$.

5.4 Nombres complexes sous forme polaire :

1. Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

$$-5, \quad 2i, \quad 2\,e^{-5i}, \quad -8\,e^{\frac{4\pi}{7}i},$$

$$-1-i\sqrt{3}, \quad \frac{1+i}{\sqrt{3}-i}, \quad (\sqrt{3}-i)^{2004}.$$

2. Soient a et b deux nombres réels. Suivant les cas, donner le module et l'argument de $a\,e^{ib}$.

5.5 Mettre sous forme de sommes les expressions suivantes :

$$\sin^2 x, \quad \cos^5 x, \quad \sin^4 x \cos^3 x, \quad \cos^6 x, \quad \sin^6 x.$$

Trouver une forme générale pour $\cos^n x$ et $\sin^n x$ ($n \in \mathbb{N}$).

5.6

1. Calculer $\mathrm{Re}\,(e^{ix})$ et $\mathrm{Re}\,(-ie^{ix})$ ($x \in \mathbb{R}$).
2. Mettre les expressions suivantes sous la forme d'un cosinus multiplié par un réel positif :

$$2\sin x - 2\cos x, \quad -2\cos x + 2\sqrt{3}\sin x, \quad 4\cos x - 3\sin x, \quad \sqrt{3}\cos x + \sin x.$$

5.7 Soit $\theta \in [0; 2\pi[$.

1. Déterminer le module et un argument de $z = 1 + e^{i\theta}$.
2. En déduire le module et un argument de $2 + \sqrt{3} + i$ et de $(1 + e^{i\theta})^n$ ($n \in \mathbb{N}$).
3. Justifier l'égalité suivante, pour tout $z \in \mathbb{C} - \{1\}$:

$$\frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} = 1 + z + \cdots + z^n = \sum_{k=0}^{n} z^k.$$

On pose alors $C = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ et $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$. En formant $C + iS$, calculer C et S.

5.8 Soit α un réel et x un nombre vérifiant l'égalité $x + \dfrac{1}{x} = 2\cos\alpha$;
montrer qu'alors $x^n + \dfrac{1}{x^n} = 2\cos n\alpha$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (on pourra le montrer de deux façons différentes).

5.9 Exprimer $\cos 5a$ en fonction de $\cos a$, puis $\sin 5a$ en fonction de $\sin a$.
En utilisant le fait que $\cos \dfrac{5\pi}{10} = 0$, donner la valeur de $\cos \dfrac{\pi}{10}$.

5.10 Calculer les racines carrées des nombres complexes suivants :

1. $-3, \quad 4i, \quad 1 + i$ (on en déduira la valeur de $\cos \dfrac{\pi}{8}$ et $\sin \dfrac{\pi}{8}$) ;
2. $-1 + 4i\sqrt{3}$ et $-7 - 6i\sqrt{2}$.

5.11 Donner sous forme cartésienne les racines de l'équation :

$$iz^2 + (2+i)z + 1 - 3i = 0$$

En déduire les solutions de l'équation :

$$-iz^2 + (2-i)z + 1 + 3i = 0$$

5.12 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$z^6 = i, \quad z^7 = 8\, e^{\frac{2i\pi}{3}}, \quad z^4 = 24\, i - 7, \quad \bar{z}^2 = z^6.$$

On donnera à chaque fois les solutions sous forme cartésienne.

5.13 Racines cubiques de l'unité :

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = 1$.
2. On pose $j = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\, i$ (notation classique en mathématiques). Vérifier que $j^2 = \bar{j}$, puis calculer $1 + j + j^2$.
3. Déterminer sous forme cartésienne $\dfrac{1-j}{1+j}$, $(1+j)^{2004}$ et $(1+j^2)^{2005}$.

Problèmes

-I-

Soit $z \neq 1$, un nombre complexe tel que $z^5 = 1$.

1. Démontrer que $\alpha = z + \frac{1}{z}$ est solution de l'équation

$$x^2 + x - 1 = 0$$

2. En déduire alors la forme cartésienne des racines cinquièmes de l'unité. Donner la valeur de $\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\sin\frac{2\pi}{5}$.
3. Calculer $\cos\frac{\pi}{5}$ et $\sin\frac{\pi}{5}$.

-II-

1. Soit n un entier naturel non nul; résoudre l'équation

$$\left(\frac{x+i}{x-i}\right)^n = 1$$

   On exprimera les solutions à l'aide de la fonction tangente et on précisera le nombre de solutions.

2. Donner sous forme cartésienne les solutions de l'équation

$$(x+i)^5 = (x-i)^5$$

3. En déduire l'expression de $\cot \frac{\pi}{5}$ et de $\cot \frac{2\pi}{5}$.

-III-

Soient a un nombre réel et n un entier naturel non nul fixés. On considère l'équation complexe :

$$\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n = \frac{1+ia}{1-ia} \qquad (1)$$

1. Soient s et t des nombres complexes où $s \neq 0$, montrer que :

$$|s+t| = |s-t| \text{ si et seulement si } \frac{t}{s} \text{ est imaginaire pur.}$$

2. Sans calculer les solutions de (1) , montrer qu'elles sont réelles.
3. Soit θ_0 l'unique élément de $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ tel que $\tan\theta_0 = a$. Déterminer en fonction de θ_0 les solutions de (1).

-IV-

On considère le polynôme complexe $P(z) = z^3 - (6+3i)z^2 + (9+12i)z - 9(2+3i)$.

1. Montrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
3. Si l'on note M_1, M_2 et M_3 les images dans le plan complexe des solutions de l'équation, montrer que $M_1M_2M_3$ est un triangle équilatéral.